

NORDISKA KOMMISSIONEN FÖR GEODESI

6. nordiske geodætiske
Helsinki maj 1970

Geoidbestemmelse ved collocation

af

C.C. Tscherning
Geodætisk Institut
København

Med et kortbilag.

Resumé : Den fysiske geodesi har til opgave at bestemme et potential kompatibelt med diskrete målinger, (der kan opfattes som afbildningen af potentialet ved en lineær funktional). Collokation eller generaliseret interpolation er særlig velegnet til en sådan bestemmelse. Årsagen hertil er, at anomalipotentialet T er element i et hilbertrum med reproducerende kerne. Ved bestemmelsen af den astrogeodetiske quasigeoide for det sydvest-skandinaviske område er der benyttet formler i sfærisk approximation.

Summary : The purpose of physical geodesy is to determine a potential field compatible with given discrete observations (values of linear functionals operating on the potential). Collocation or generalised interpolation is well suited for such a determination. This is due to the lucky fact, that the disturbing potential T is a function in a reproducing kernel hilbert space. Formulas in spherical approximation are used when determining the astrogeodetic quasigeoid of the south-west scandinavian area.

1. Indledning.

Der vil (så godt som) altid være et uendeligt antal potentialer kompatible med et endeligt sæt målinger. Det er altså vor opgave at vælge et blandt disse mange: Da vi forventer, at f.eks. akvipotentialflader er "pæne" glatte flader, er det naturligt at søge det potential, der har den mindste norm. Nu kan der indføres (uendelig) mange normer, f.eks. svarende til, at vi tager hensyn til højere afledede. Vi skal se på et vigtigt

Eksempel 1. Mængden af potentialer regulære i den åbne mængde udenfor jordens overflade (Ω , med rand ω), (og regulære i ∞), H_{Ω} , kan vi udstyre med Dirichlet normen:

$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 d\Omega$ og det tilsvarende indre produkt:

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \psi d\omega.$$

Udstyret med denne norm bliver H_{Ω} et hilbertrum med reproducerende kerne [5], [12]: $K(P, Q) = G(P, Q) - N(P, Q)$, differensen mellem Green's og Neumann's funktion for Ω .

$$(\varphi(P), K(P, Q)) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega} \nabla \varphi(P) \cdot \nabla K(P, Q) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} d\omega = \frac{1}{4\pi} \iint_{\omega} \frac{\partial G(P)}{\partial n} N(P, Q) d\omega = \varphi(Q).$$

2. Formel bestemmelse af anomalipotentialet.

Anomalipotentialets værdi i et punkt P kan opfattes som værdien af funktionalen $L_P: H_{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ givet ved $L_P(T) = T(P)$. Tilsvarende kan tyngdeanomalier, lodafvigelse og højdeanomalier i punktet P opfattes som billedet af T ved funktionalerne (i sfærisk approximation):

$$(2.1) \quad L_{\Delta g}(P): H_{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : L_{\Delta g}(P)(T) = - \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_P - \frac{2}{r_P} T(P),$$

$$(2.2) \quad L_{\xi}(P): H_{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : L_{\xi}(P)(\varphi) = - \frac{\Delta \varphi}{2\Omega} \quad (B: \text{geografisk bredde}),$$

$$(2.3) \quad L_{\eta}(P): H_{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : L_{\eta}(P)(\varphi) = - \frac{1}{\cos(B)} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \quad (L: \text{geografisk længde}),$$

$$(2.4) \quad L_{\gamma}(P): H_{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : L_{\gamma}(P)(\varphi) = \tau/\gamma_P \quad (\gamma_P: \text{normaltension i punktet } P).$$

Her vi valgt en norm i H_{Ω} (f. eks. Dirichletnormen, jvf. eksempel 1), og dermed en reproducerende kerne $K(P, Q)$, samt givet et sæt målinger $\{m_i\}$ er den søgte løsning givet på formen

$$(2.5) \quad \varphi(P) = \sum_{i=1}^n a_i L_i K(P_i, P), \quad \text{hvor } L_i \text{ er den til målingen } m_i \text{ svarende funktional.}$$

P_i er de punkter, hvori målingerne er foretaget.

Konstanterne a_i bestemmes ved

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 L_1 K(P_1, P_1) & \dots & L_1 L_n K(P_1, P_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_n L_1 K(P_n, P_1) & \dots & L_n L_n K(P_n, P_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$$

Bemærk at $L_i(\varphi) = \sum_{j=1}^n a_j L_j L_i K(P_j, P_i) = m_i$, dvs. målingerne fastholdes eksakt.

Usikkerheden på en lineær funktional's værdi af dette potential er

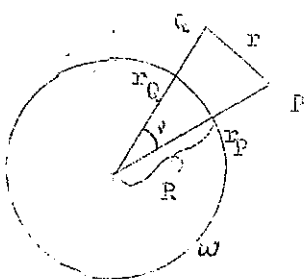
$$(2.7) \quad L_P L_P K(P, P) = \left\{ L_P L_i K(P, P_i) \right\} \left\{ L_i L_j K(P_i, P_j) \right\}^{-1} \left\{ L_j L_P K(P_j, P) \right\}, \quad (\text{sammenlign med [13] (7-63) og (7-64)}). \quad (\text{Bvis for 2.5-7 føres let indirekte ved at benytte kernens reproducerende egenskab, jvf. [12]}).$$

Løsningen (2.5) til collokationsopgaven er en linearkombination af regulære potentialer. Som betingelse for en entydig løsning må kræve at funktionalerne L_i er lineært uafhængige i H_{Ω}' (det til H_{Ω} duale rum), - eller at potentialerne $L_i K(P_i, Q)$ er lineært uafhængige i H_{Ω} . Men iøvrigt vil ligningssystemet (2.6) altid være positivt semidefinit og symmetrisk, hvorfor Cholesky's metode vil være velegnet.

3. Valg af reproducerende kerne (= valg af norm).

Vi vil igen betragte et

Eksempel 2. Var jorden en kugle, ville Greens funktion være givet ved $G(P, Q) = \frac{1}{r} + \frac{1}{\ell}$



hvor $r = (r_P^2 + r_Q^2 - 2r_P r_Q \cos(v))^{1/2}$ og

$$\ell = (((r_P r_Q)/R)^2 - 2r_P r_Q \cos(v) + R^2)^{1/2}, \quad (\text{se figur}).$$

Det er vanskeligere at bestemme Neumann's funktion; men heldigvis kan vi let udregne den reproducerende kerne direkte. Er φ_{nm} $|n| \leq n, n=0, \dots, \infty$, et ortonormalsystem i H , så gælder det at

$$K(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \varphi_{nm}(P) \cdot \varphi_{nm}(Q).$$

Fig.1.

Det ses let, at ortonormalisatset i dette tilfælde bliver

$$\varphi_{nm} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \frac{R^{n+1}}{r_p^{n+1}} \begin{pmatrix} \bar{R}_{nm} \\ \bar{S}_{nm} \end{pmatrix}, \text{ hvor } \bar{R}_{nm} \text{ og } \bar{S}_{nm} \text{ er de fuldstændigt ortonormaliserede}$$

kuglefunktioner, jvf. [12], (1-73). Vi har således

$$K(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} \frac{R^{2n+1}}{(r_p r_Q)^{n+1}} P_n(\cos(\nu)) = 2/\ell + \frac{1}{R} \ln \left(\frac{r_p r_Q (1 + \cos(\nu))}{R^2 + R^2 - r_p r_Q \cos(\nu)} \right).$$

Som bekendt afhænger Green's og Heurmann's funktioner kraftigt af randen ω , og det samme gælder for den reproducerende kerne, afhængigt af, om det er Dirichlethorven, vi har valgt.

For jordens vedkommende kender vi jo ellers ikke randen, - det er den vi skal bestemme -; på samme måde er det uheldigt at søge en løsning i H_1 , da kernen ofte vil være singular på den rand, hvortil målingerne for det næste vil referere. (jvf. Vening Meines formler, der er fejlagtige i deres sædvanlige form, idet Stokes kerne er ∞ på randen, [19]).

Som fremhævet i [10] kan vi finde en vilkårlig god approximation til potentialet i rummet H_{Ω} , hvor $\Omega' \supset \Omega$. Som rand kan vi derfor anvende en "Bjerhammerkugle" helt indesluttet i jorden. Den reproducerende kerne får således, hvis vi anvender Dirichlethorven, den i eksempel 2 anførte form, hvor R er Bjerhammerkuglens radius.

Det er også muligt at vælge den reproducerende kerne udfra vort statistiske kendskab til jordens potentialfelt. Dette forudsætter dog, at vi kan betragte potentialfeltet som en stationær stokastisk proces - hvad det kun er til en meget grov approximation.

Forestiller vi os således, at potentialet kan repræsenteres ved en stationær stokastisk proces, så modsvarer målingerne udfaldet af et sæt stokastiske variable (lineære funktionaler) $X(t)$, $t \in \omega$. Vi forestiller os, at $E(X(t)) = X(t)(\varphi) = m_t$. Kovariansfunktionen $K(s, t) = E(X(t)X(s))$ kan, hvis den stokastiske proces er ergodisk, bestemmes ved at ombytte forventningsoperatoren E (integration m.h.t. et sandsynligheds mål P) med integration m.h.t. indexmængden ω .

Kaula har empirisk bestemt kovariansfunktionen for $X(t)$ modsvarende tyngdeanomalifunktionalerne, indexmængden svarende til ω , [8].

Betragter vi mængden af alle linearkombinationer af de (begrænsede) stokastiske variable, $L_1(X(t), t \in \omega)$, så kan dette lineære rum udvides til et hilbertrum $L_2(X(t), t \in \omega)$, med normen $\|X(t)\|^2 = E|X(t)|^2$. Dette rum vil være isomorft med et hilbertrum med reproducerende kerne $K(s, t)$, [16].

Den statistisk set mest optimale prediktion af en stokastisk variabel $Z \in L_2(X(t), t \in \omega)$ fås ved udtryk modsvarende formlerne (2.5) og (2.6), jvf. [13] kap. 7.

Da de stokastiske variable, der nedleverer funktionalerne (2.2), (2.3), (2.4) kun vil være elementer i $L_2(X(t), \tau\omega)$, hvis vi betragter hele ω , kan vi (i modsætning til [6]) ikke benytte en lokalt bestemt kovariansfunktion.

Vi vælger derfor at bestemme $K(P, Q)$ så $L_{\Delta S} L_{\Delta S} K(P, Q)$ stemmer overens med Kaulas empirisk bestemte kovariansfunktion. Dette kan gøres på følgende måde.

Da vi forudsætter at den stokastiske proces (i sfærisk approximation) er stationær (dvs. isotrop på kugleflader med centrum i jordens tyngdepunkt) må den generelle form være

$$K(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^{\infty} A_i \frac{R^{2i+1}}{(r_P r_Q)^{i+1}} P_i(\cos(v)). \text{ Sætter vi } A_i = \text{konst} = k \text{ for } i > N, \text{ vil ker-}$$

nen lettest kunne fremstilles ved

$$K(P, Q) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=0}^N A_i \frac{R^{2i+1}}{(r_P r_Q)^{i+1}} P_i(\cos(v)) + k/\lambda; \text{ (bynt (2.1) og [13], (1-81)).}$$

Kaula har bestemt 32 såkaldte degree varianser, hvoraf dog kun ca. 25 kan benyttes; herudfra kan konstanterne A_i , $i \leq 25$ beregnes. Bjerhammerkuglens radius R og konstanten ved restleddet, kan derefter let bestemmes ved at forlange at $L_{\Delta S(P)} L_{\Delta S(Q)} K(P, Q)$ slutter tættest (f.eks. i mindste kvadraters forstand) til Kaulas værdier [8] tabel 7. Som resultat får man, at forholdet mellem Bjerhammerkuglens radius og jordens radius er nær 0.99.

4. Opstilling af normalligningerne 2.6.

Til opstilling af ligningssystemet 2.6 kræves der beregning af $L_i L_j K(P_i, Q_j)$.
Idet

$$\left. \frac{\partial \frac{1}{\ell}}{\partial B} \right|_P = \left. \frac{\partial \cos v}{\partial B} \right|_P \left. \frac{\partial \frac{1}{\ell}}{\partial \cos v} \right|_P = (\cos(BP) \cdot \sin(BQ) - \sin(BP) \cos(BQ) \cos(LP-LQ)) \frac{r_P r_Q}{\ell^3},$$

$$\left. \frac{\partial \frac{1}{\ell}}{\partial r} \right|_P = -r_Q \frac{\frac{r_P r_Q}{R^2} - \cos v}{\ell^3},$$

$$L_{\Delta S(P)} \left(\frac{1}{\ell} \right) = -\frac{2}{r_P} \cdot \frac{1}{\ell} + \frac{r_Q \left(\frac{r_P r_Q}{R^2} - \cos v \right)}{\ell^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial BQ} \left(\left(\frac{r_P r_Q}{R^2} - \cos v \right) \frac{r_Q}{\ell^3} \right) = -\frac{r_Q}{\ell^3} \frac{\partial \cos v}{\partial BQ} \left(1 - \frac{3r_P r_Q}{\ell^3} \left(\frac{r_P r_Q}{R^2} - \cos v \right) \right)$$

og sætter vi

$$f_n = A'_n \frac{R^{2n+1}}{(r_P r_Q)^{n+1}}$$

fås

$$(4.1) \quad L_{AG(P)} K(P, Q) = \sum_0^N f_n \frac{(n-1)}{r_P} P_n(\cos v) - \frac{k}{R} \left(\frac{2}{r_P} - \frac{r_Q \left(\frac{r_P r_Q}{R^2} - \cos v \right)}{\ell^3} \right)$$

$$(4.2) \quad L_{\mathcal{J}(P)} K(P, Q) = - \frac{1}{\mathcal{J}_P r_P} \frac{\partial \cos v}{\partial BP} \left(\sum_0^N f_n \frac{\partial P_n \cos v}{\partial \cos v} + \frac{k}{R} \frac{r_P r_Q}{\ell^3} \right)$$

$$(4.3) \quad L_{\mathcal{L}(P)} K(P, Q) = - \frac{1}{\mathcal{J}_P r_P} \frac{1}{\cos BP} \frac{\partial \cos v}{\partial LP} \left(\sum_0^N f_n \frac{\partial P_n \cos v}{\partial \cos v} + \frac{k}{R} \frac{r_P r_Q}{\ell^3} \right)$$

$$(4.4) \quad L_{\mathcal{J}(Q)} L_{AG(Q)} K(P, Q) = - \frac{1}{\mathcal{J}_Q} \frac{\partial \cos v}{\partial BQ} \left(\sum_0^N f_n \frac{(n-1)}{r_P r_Q} \frac{\partial P_n \cos v}{\partial \cos v} + \frac{3k}{R \ell^5} \left(\cos v - \frac{R^2}{r_P r_Q} \right) r_P r_Q \right)$$

$$(4.5) \quad L_{\mathcal{J}(Q)} L_{\mathcal{J}(P)} K(P, Q) = \frac{1}{\mathcal{J}_P \mathcal{J}_Q r_P r_Q} \left(\frac{\partial \cos v}{\partial BP} \frac{\partial \cos v}{\partial BQ} \left(\sum_0^N f_n \frac{\partial^2 P_n \cos v}{\partial \cos v^2} + \frac{3k}{R} \frac{(r_P r_Q)^2}{\ell^5} \right) + \frac{\partial^2 \cos v}{\partial BP \partial BQ} \left(\sum_0^N f_n \frac{\partial P_n \cos v}{\partial \cos v} + \frac{k}{R} \frac{r_P r_Q}{\ell^3} \right) \right)$$

$L_{\mathcal{L}(Q)} L_{\mathcal{J}(P)} K(P, Q)$ fås ved at benytte de "blandede" afledede,

$L_{\mathcal{J}(Q)} L_{AG(P)}$, $L_{\mathcal{J}(Q)} L_{\mathcal{J}(P)}$ fås af (4.1), (4.2), (4.3) ved multiplikation med $1/\mathcal{J}(Q)$.

Beregning af leddene

$$\sum_0^N f_n \frac{\partial^2 P_n \cos v}{\partial \cos v^2}$$

foregår lettest ved en "baglæns" rekursion efter et generaliseret hornersk skema [4], se bilag 1. Ved beregning af de højere afledede af legendrepolynomierne fås som biprodukt de lavere afledede, hvilket forenkler beregningen af udtryk som (4.5).

5. Afsluttende bemærkninger.

Som det fremgår af det foranstående kan anomalipotentialet bestemmes ved denne metode såvel udfra tyngdeanomalier, lodafvigelser, satellitobservationer m.v. Nu vil lodafvigelser være knyttet til et bestemt datum, f.eks. ED 1950, d.v.s. en kombination af lodafvigelser og tyngdeanomalier er ikke direkte muligt. Problemet kan dog formentlig løses ved at formulere collokationsopgaven som en udjævningsopgave og medtage parametre, der bestemmer et datumskift.

Det er en betingelse for (entydig) løsning, at determinanten i ligningssystemet (2.6) er $\neq 0$. Et ligningssystem bestående af mange og tætliggende observationer (f.eks. 50 tyngdeobservationer indenfor 100 km^2) vil indeholde et meget stort antal (numeriske) singulariteter, hvis man arbejder med 9 cifres nøjagtighed. Tilsvarende er lodafvigelser og tyngdeanomalier også "meget" afhængige af hinanden. Hele problematikken kræver informationsteoretiske undersøgelser [18].

Nulpunktet for højdeanomalierne må fastlægges ved at medtage en enkelt fiktiv observation. Ved bestemmelsen af den sydvestskandinaviske quasigeoide er der således fastholdt et punkt i Tyskland (Røst) for at skabe forbindelse til den af Heitz bestemte Vesttyske geoide.

Det vedlagte kort over højdeanomalier i ED 1950 er beregnet udfra 136 lodafvigelser i Danmark, Tyskland og Sverige, jvf. bilag 2. Usikkerheden på differencen mellem højdeanomalierne i Røst og Landskrona er under 10 cm.

Bemærk [14] og [15] hvor Moritz giver en simpel fremstilling af ovenstående metode.

Litteratur.

- [1] Anderson, Einar: Determination of Latitude at Buddinge by the Horrebow-Talcot Method. G.I. skr. 3. rk., bd. XII, 1948.
- [2] Asplund, Lars: Brev til professor Anderson, 1969.
- [3] Bülow-Olsen, H.: Determinations of Longitude and Latitude in Denmark 1960. G.I. skr., 3.rk., bd. XXXVII, 1965.
- [4] Clenshaw, C.W.: A note on the Summation of Chebyshev Series. Math. Tables and other Aids to Computation, Bd. 9, 1955, p.118-120.
- [5] Garabedian, P.R.: Partial Differential Equations, 1964.
- [6] Heitz, S.: Eine astronomisch-geodätische Geoidbestimmung für Westdeutschland, 1969.
- [7] IUG/AIG: Liste des stations de déviation de la verticale rattachées au Réseau Européen. Liste no. 3, 1967.
- [8] Kaula, W.M.: Statistical and Harmonic Analysis of Gravity. J.G.R., Vol. 64, No. 12, 1959.
- [9] Kejlse, E.: Re-Calculation of older Determination of Latitude. G.I. medd. no. 30, 1956.
- [10] Krarup, T.: A Contribution to the Mathematical Foundation of Physical Geodesy. G.I. medd. no. 44, 1969.
- [11] Manuskript, Geodætisk Afdeling I.
- [12] Meschkowski, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. 1962.
- [13] Moritz, H. & W.A. Hoiskanen: Physical Geodesy. 1967.
- [14] Moritz, H.: A generalised least-squares model. 1970.
- [15] Moritz, H.: Least-Squares Estimation in Physical Geodesy. 1970.
- [16] Parzen, Emanuel: Statistical Inference on time series by Hilbert Space Methods, I. Office of Naval Research, 1959. (Også i: Time Series Analysis Papers, 1967).
- [17] Poder, Knud: Determinations of Latitude 1956. G.I. skr., 3.rk., bd. XXXIII, 1960.
- [18] Tscherning, C.C.: Bestemmelse af lodafvigelse ved collokation, 1970.
- [19] Weisfeld Norris and S. Roy Schubert: The Deviation of the Deflections of the Vertical from Stokes' Formula. J.G.R. Vol. 72, No. 4, 1967.
- [20] Zimmermann, Gunther: Simultanbestimmungen der Lotabweichungskomponenten ζ und η mit Prismenastrolabium, 1967.

Bilag 1.

```
real procedure ddp(f,degree,angle);
integer degree; real angle; array f;
begin comment The procedure computes the value of the second
  derivate of a sum of legendrepolynomials. The value is assigned
  to the name of the procedure. The degree of the
  polyncmium of highest order is assigned to the variable
  with that name. The coefficients of the polyncmials are found
  in the array f. The argument of the polynormium are found in the
  variable angle. If the value of the first derivate or of the
  polynormium itself are wanted, the variables da0 and a0 must be
  declared as exterior variables. Reference Clenshaw, Math.Tables
  and other aids to computation, Vol.9, 1955, p.118-120;
integer i;
real a1,a0,a2,da0,da1,da2,dd0,dd1,dd2,s1,s2,sc,cosangle;
a0:=a1:=da0:=da1:=dd0:=dd1:=0;
cosangle:= cos(angle);
for i:= degree step -1 until 0 do
  begin s1:=2-1/(i+1); s2:=1-1/(i+2);
    sc:=s1xcosangle;
    a2:=a1; a1:=a0; a0:=a1xsc-a2xs2+f[i];
    da2:=da1; da1:=da0; da0:=da1xsc-da2xs2+a1xs1;
    dd2:=dd1; dd1:=dd0; dd0:=dd1xsc-dd2xs2+2xda1xs1;
  end;
  ddp:=dd0;
end;
```

Bilag 2.

Data benyttet ved bestemmelsen af den sydvestskandinaviske quasigeoide.

Forholdet mellem Bjerhærmerkuglens radius og den geocentriske afstand til projektionen p. den internationale ellipsoide: 0.991925.

Benyttede degree variances [8] tabel 8 :
7.3, 43.6, 29.8, 10.5, 24.2, 2.8, 22.7, 22, 15, 18, 7,
15, 23, 22, 6, 12, 19, 10, 7, 14, 10, 9, 10, 9, 11, 4, 8, 5;

Lodafvigelser ED 1950 :

Ref.	Navn	Bredde	A-G	Længde	(A-G)cos H	H
Danmark						
		°		°	"	m
[9],[11]	Skagen	57 43.78	-2.54	10 35.83	2.99	3.9
[9]	Teglhøj	57 29.37	-0.68	10 08.37		92.9
[9]	Flade	57 25.37	0.41	10 28.12		110.8
[9],[11]	Tise	57 17.48	-3.59	9 49.06	-2.36	49.9
[9]	Storskoven	57 12.05	-1.69	10 14.77		101.7
[17]	Lerup	57 07.21	-0.06	9 25.06		82.9
[9]	Jægerdalsvej	56 55.58	0.32	9 49.01		91.5
[9]	Muldbjerg	56 54.53	-2.54	10 15.67		48.1
[17]	Salkjærvej	56 53.67	-0.49	8 47.26		88.8
[17]	Præsteshøj	56 50.67	-0.89	9 21.13		63.2
[9]	Rold Bavnehøj	56 46.07	-0.48	9 49.43		115.4
[9],[11]	Hovhøj	56 38.71	-0.80	10 00.12	2.08	111.4
[11]	Lem Bavnehøj	56 33.67		8 20.17	-0.20	90.6
[9],[11]	Hegedal Bavnehøj	56 30.34	-0.69	10 33.99	0.30	56.2
[17],[11]	Ryde	56 26.38	1.64	8 48.48	-0.28	89.9
[9]	Lysnet	56 22.38	3.72	9 58.41		131.9
[9],[11]	Agri Bavnehøj	56 13.83	0.58	10 32.27	3.78	137.6
[3]	Tihøj	56 13.19	-0.55	8 40.03	-0.36	112.1
[11]	Sorring	56 10.92		9 47.50	2.65	148.5
[11]	Hovvig	56 10.39		8 07.47	-2.67	23.1
[17],[11]	Momhøj	56 04.04	-1.84	8 51.66	-0.41	96.3
[11]	Tophøj	56 03.33		8 27.92	-0.52	86.2
[3]	Ejer Bavnehøj	55 58.66	-5.13	9 49.91	3.61	184.4
[11]	St Maglehøj	55 57.94	-2.20	12 02.33	-0.37	71.8
[11]	Sdr Havvig	55 55.87		8 09.29	-1.06	21.6
[3]	Dyret	55 50.62	3.21	10 33.86	3.31	50.7
[11]	Østtarp	55 48.65		8 34.17	-0.11	64.6
[9]	Vejrhøj	55 47.62	-1.71	11 23.83		120.2
[9]	Julianehøj	55 46.93	-1.30	11 57.45		18
[17],[11]	Møllebjerg	55 45.42	-0.97	9 15.44	-1.36	137.7
[1]	Buddinge	55 44.36	-1.90	12 30.06	1.15	50.5
[9]	Refsnæs	55 44.20	-2.37	10 54.79		61
[3]	Troldemose Banke	55 43.78	-0.39	9 56.34	4.10	111.4
[9]	Mørkemose Bjærg	55 38.15	-0.70	11 41.03		105
[9]	Kløveshøj	55 34.21	-0.52	11 21.09		100
[9]	Kongelunden	55 33.68	-1.16	12 34.12		3.8
[9]	Bøgebjerg	55 32.71	0.26	10 41.73		36.6
[11]	Grimstrup	55 32.22		8 38.07	-1.88	47.5
[9],[11]	Skamlingsbanken	55 25.17	0.50	9 34.01	0.51	114.0
[17],[11]	Hashøj	55 22.53	1.27	11 20.24	-1.89	84.2
[9],[11]	Dyrebanks	55 22.12	0.10	10 11.24	2.91	124.0
[11]	Ribe	55 19.73		8 45.74	-2.59	54.7
[11]	Rangtang	55 19.56	-0.30	9 06.49	1.02	82.4
[9],[11]	St Møllehøj	55 19.19	0.40	12 25.35	1.95	47.7
[11]	Torup	55 08.30	0.68	11 53.63	1.09	74.4

Ref.	Navn	Bredde o ' ,	A-G "	Langde o ' ,	(A-G)cos "	H m
[11]	Knivsbjerg	55 08.21	-2.50	9 26.63	-0.14	97.2
[9]	Lerbjerg	55 07.53	-3.77	10 16.15		125.5
[11]	Rømsø	55 06.17		8 31.84	-1.89	19.6
[11]	Vognshøj	55 05.32	-5.45	8 55.37	-3.01	60.6
[9]	Kulsbjerg	55 00.63	0.05	12 00.44		107.7
[9],[11]	Kongsbjerg	54 57.96	-1.13	12 30.56	1.83	135.7
[11]	Høgebjerg	54 58.06	-5.13	9 58.54	1.11	81.2
[11]	Birket	54 54.32	-2.55	11 20.07	1.35	25.6
[11]	Stagehøj	54 51.95	-6.32	9 26.82	-1.96	67.8
[9]	Fakkebjerg	54 44.43	-3.54	10 42.06		37.6
[11]	Vigerløse	54 42.90	-1.34	11 55.92	1.00	22.7

Sverige

	[7]	Station P	58 04	1	11 50	-0.5
	[7]	Station Q	57 53	0	11 35	0
	[7]	Station R	57 43	1	11 58	0
	[7]	Vinga	57 38	1	11 36	2
	[7]	Tomtabacken	57 30	-1	14 28	1
41	[7]	Station S	57 28	0	12 11	0
37	[7]	√ Apelvikaas	57 06	2.02	12 15	1.05
32	[7]	Station T	56 54	-1	12 40	-1
37	[7]	Malensaas	56 47	0	14 16	4
36	[7]	Galgberget	56 41	-2	12 51	1
123	[2]	Knøsen	56 27.77	1.09	12 44.40	0.67
122	[2]	Høgkull	56 17.26	-2.57	12 31.67	0.07
2	[7]	√ Station N.4	56 04	-1	14 17	
	[2]	Landskrona	55 52.64	-6.87	12 50.65	-3.58
	[7]	Maglehem	55 46	-2	14 09	7
	[7]	Station V	55 42	-9	13 12	-3
	[2]	Romleklint	55 37.28	-5.34	13 27.15	-0.64
	[7]	Kaaseberga	55 23	-4	14 04	-1

Tyskland

	[20]	Klintum	54 44.55	-4.94	8 59.91	-1.69
	[20]	Suderschmedeby	54 39.80	-4.19	9 26.75	-1.85
	[20]	Mehlby Røst	54 39.87	-3.25	9 53.16	-0.05
	[7]	Hiddensee	54 36	0	13 07	3
	[20]	Oatenfeld	54 28.22	-5.56	9 14.05	-0.75
	[20]	Brekendorf	54 25.84	-3.93	9 39.87	-0.13
	[7]	Burg Staberndorff	54 25	-1	11 17	-1
	[20]	Panker	54 19.73	-1.30	10 32.81	0.10
	[20]	Welmbutel	54 11.91	-4.99	9 15.10	-0.93