

C.C.Tscherning, Niels Bohr Institutet

Tyngdepunkt og Masse Midtpunkt.



Forsvarsakademiet 2014-01-31

Definitioner:

- **Masse-midtpunkt:**
- Ligevægtpunkt for summen af alle masse-dele

- **Tyngdepunkt:**
- Punkt, hvor drejningsmomentet er nul (ligevægt mht. tyngdekraften)



Massemidtpunkt

Punkt i et legeme, der angiver middelbeliggenheden af massen i legemet.

Massemidtpunktet bevæger sig, som om alle ydre kræfter på legemet og hele dets **masse var koncentreret** i dette punkt.

For et system af partikler med masser m_i , M samlet masse og stedvektorer \mathbf{r}_i er stedvektoren \mathbf{R} for massemidtpunktet givet ved

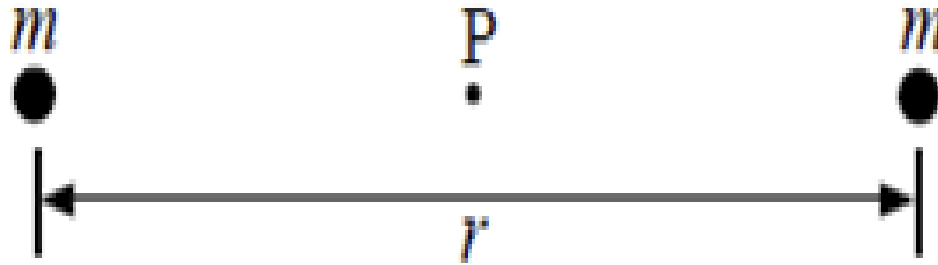
$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Er den ydre kraft alene tyngdekraften ved jordoverfladen, vil et hvilende legeme, ophængt gnidningsfrit i massemidtpunktet, forblive i hvile uanset legemets stilling.



Massemidtpunkt udfra ligevægt

Vi kan søge efter ligevægtsstillingen for at finde massemidtpunktet. **Der behøver ikke være nogen masse i punktet !**



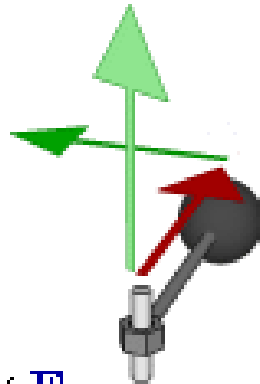
Bruges i gammeldags vægt til at bestemme m .



Tyngdepunkt

- Punkt, hvor drejningsmomentet er nul (ligevægt mht. tyngdekraften, F)

http://en.wikipedia.org/wiki/Centers_of_gravity_in_non-uniform_fields



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

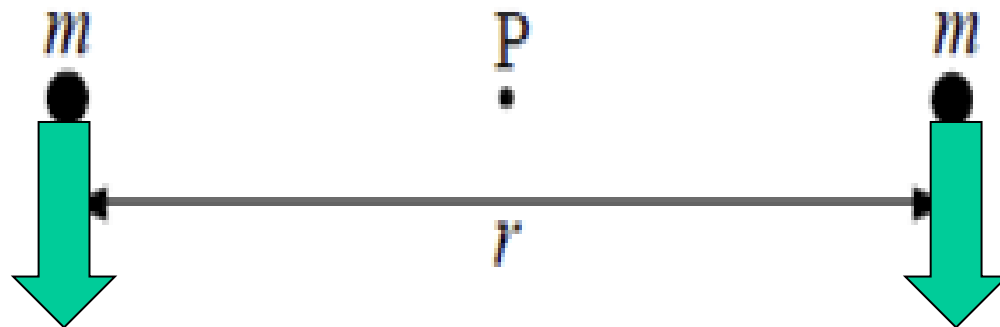
$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Torque_animation.gif



Tyngdepunkt udfra ligevægt: Tyngdevektorer identiske.

Vi kan søge efter ligevægtsstillingen for at finde tyngdepunktet. Der behøver ikke være nogen masse i punktet !



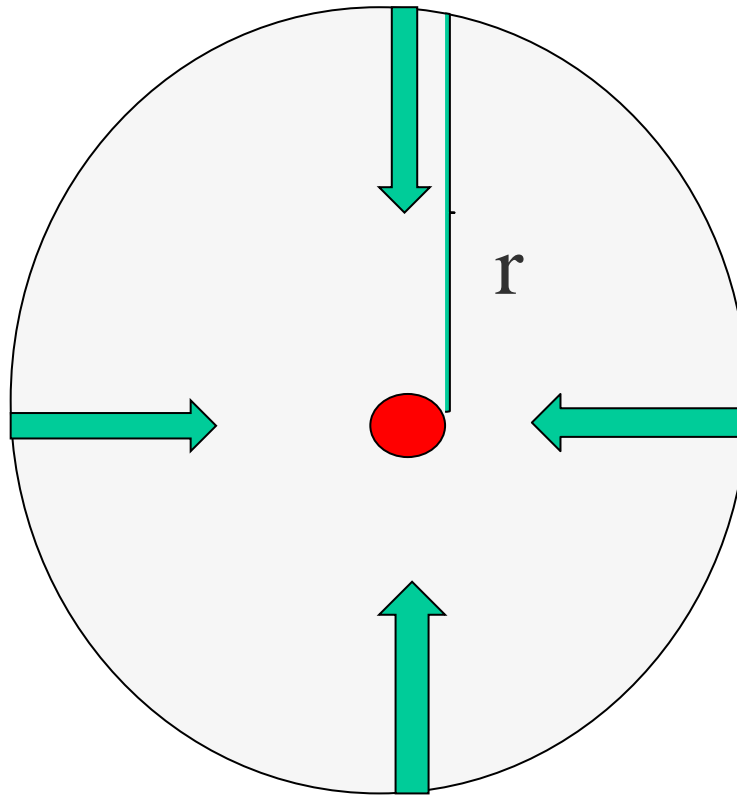
Hvis **tyngdekraften** er den samme for de 2 masser, så er tyngdepunkt og massemidtpunkt identiske !



Tyngdepunkt: kugle-symmetrisk tyngdefelt.

Tyngdekraften svarer til at totalmassen M er placeret i **centrum** af kuglen: $g = GM \cdot r/|r|^3$

Tyngdepunkt=
Masse-
midtpunkt



Tyngdepunkt: hvordan finder vi det ?

Mål tyngden i 2 højder:

$$g(r) = GM/r^2,$$

$$g(r + h) = GM/(r + h)^2$$

Find M, r, (vektorens retning er lodret, nedad !)

$$h=10 \text{ m}, G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$g(r) = 9.8100000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$g(r+10\text{m})=9.8099691 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



Tyngdepunkt: hvordan finder vi det ?

2 ligninger med 2 ubekendte, r , M .

$$g(r) = GM/r^2,$$

$$g(r + h) = GM/(r + h)^2$$

Omformes til 2,grads-ligning

Resultat (regn selv efter):

$r = 6354$ km (korrekt: 6371 km)

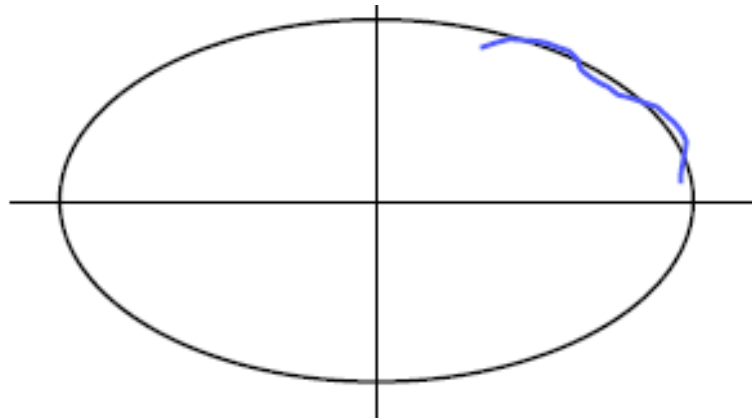
$M = 5.935 \times 10^{24}$ kg (korrekt: $M = 5.976 \times 10^{24}$ kg)



Jordens Tyngdepunkt: hvordan finder vi det ?

Newton viste at et roterende legeme må stille sig i en ligevægtsstilling, hvor randen (middel-havniveau) er en omdrejnings-ellipsoide

Indtil 1960 kun små stykker kendt over kontinenterne
Ellipsoide bestemt, så den passede med det "lille" område.



Jordens centrum (tyngdepunkt) fastlagt udfra ellipsoidens centrum: Fejl op til 1 km.



Tyngdepunkt: ved hjælp af Gradmåling

Dansk-Hannoveransk samarbejde

Schumacher,

Gauss,

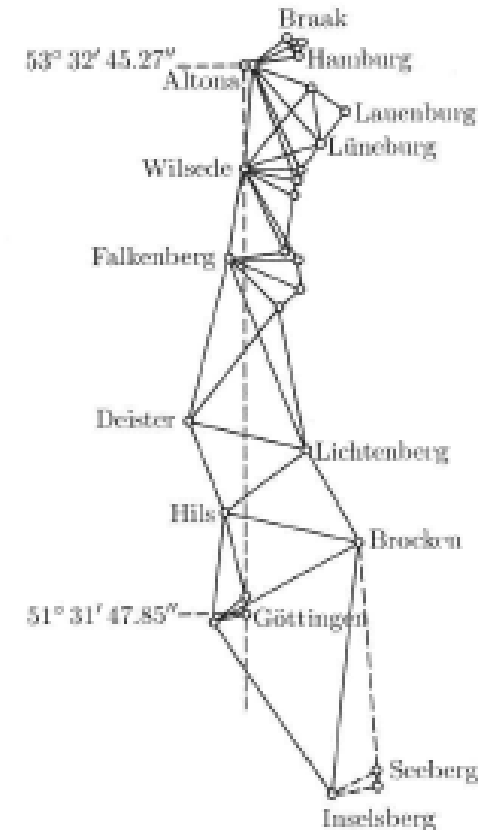
Den danske

Gradmåling:

Andræ

Generalstabens

Topo. Afd.



Tyngdepunkt: Gradmålings resultater.

Andræ: $1/f = 300.000 !$

Tab. 7.1. Parameters of reference ellipsoids (rounded values), NIMA (2000)

| Name, year | semimajor axis a (m) | reciprocal flattening $1/f$ |
|-----------------|------------------------|-----------------------------|
| Airy 1830 | 6 377 563 | 299.3 |
| Everest 1830 | 6 377 276 | 300.8 |
| Bessel 1841 | 6 377 397 | 299.15 |
| Clarke 1866 | 6 378 206 | 294.98 |
| Clarke 1880 | 6 378 249 | 293.47 |
| Hayford 1909 | 6 378 388 | 297.0 |
| = Int.Ell.1924 | . | . |
| Krassovski 1940 | 6 378 245 | 298.3 |
| GRS 67 | 6 378 160 | 298.247 |
| GRS 80 | 6 378 137 | 298.257 |



Resultater kun langs Meridian:

(Den geografiske) Bredde kunne bestemmes godt udfra astronomiske målinger (Nordstjernen mm.)

(Den geografiske) længde krævede synkronisering af ure (tidsmåling). Landkort forkerte øst-vest !

Første forsøg med brug af raketter efter Englændernes bombardement af København 1807. Kunne ses samtidig fra Sjælland og Jylland !



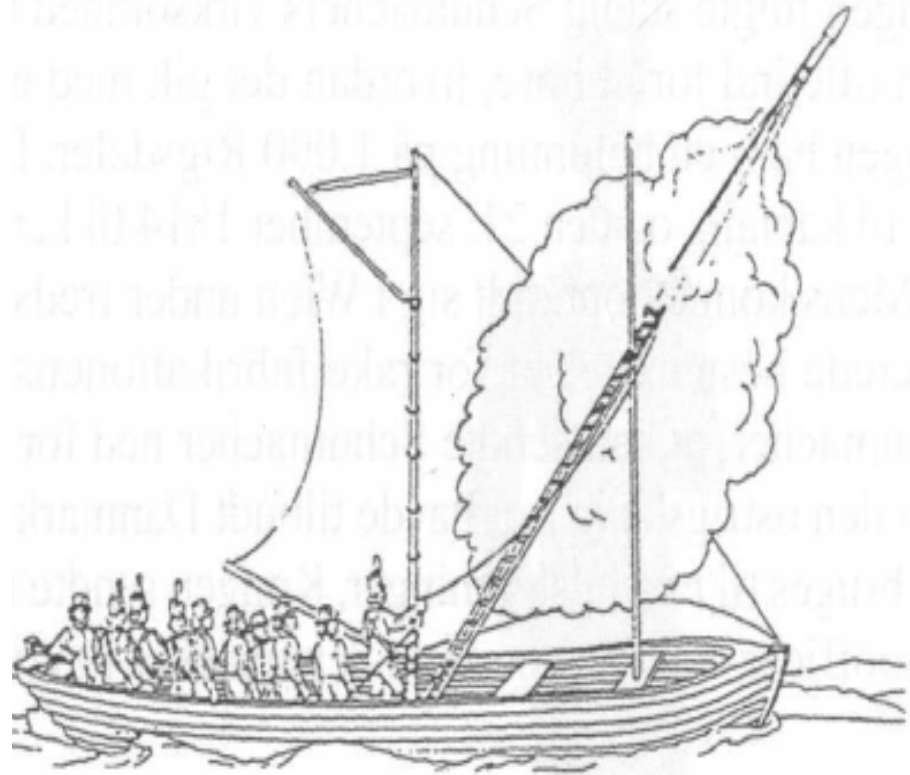
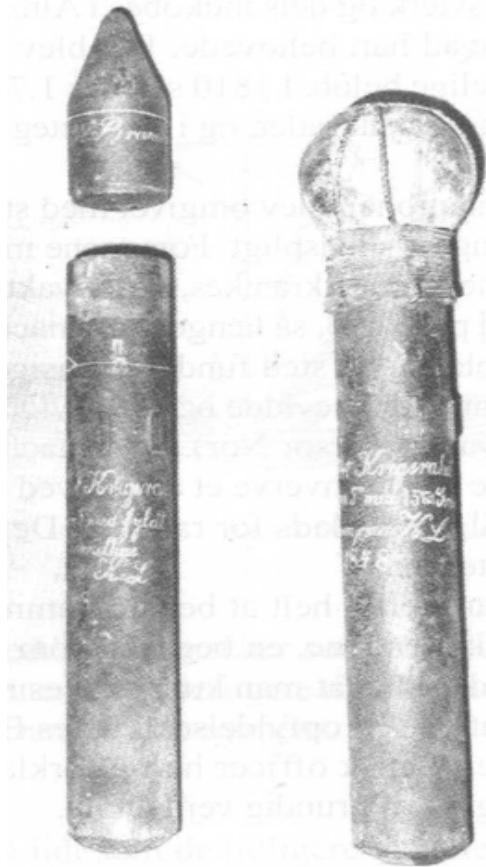
Fortegnet Danmarkskort



Forsvarsakademiet 2014-01-31



Raketforsøg 1816:



Rekonstruktion af raketfartøj.

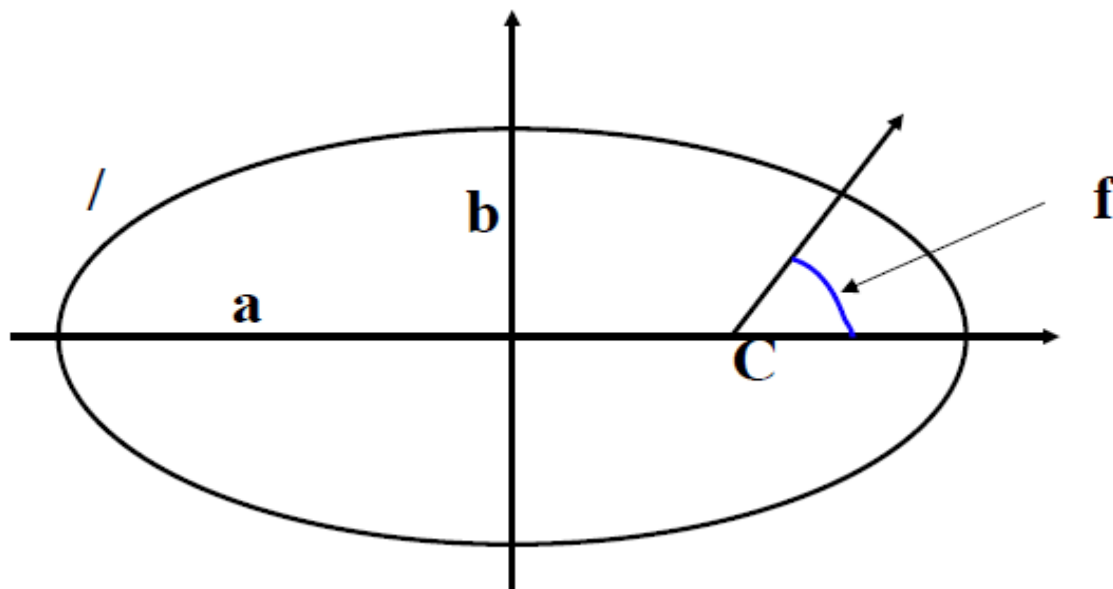
Lysglimt observeret fra Rundetårn og Hjelmsø.



Tyngdepunkt: Sputnik.

Keplers 1. lov: Banen en ellipse og hvis tyngden som for en punktmasse, så vil tyngdepunktet findes i bane-ellipsens ene fokus, her C !

Teori for
planetbaner,
men kan



anvendes for satellitter tæt på Jorden.



Tyngdepunkt: Fejl i Gradmålings resultater.

Tab. 7.3. Translation, rotation, and scale factors for some geodetic datums (mean values), DMA (1987), NIMA (2000), DHDN and Pulkovo 1942 (STN42/83): IHDE and LINDSTROT (1995)

| Geodetic Datum (see Tab. 7.2) | 7-Parameter-Transformation | | | | | | | 3-Parameter-Transf. | | |
|-------------------------------|----------------------------|-------|-------|-------------------|--------------|--------------|-----------------|----------------------|-------|-------|
| | Translation (m) | | | Rotation (arcsec) | | | Scale Factor | Translation only (m) | | |
| | X_0 | Y_0 | Z_0 | ϵ_x | ϵ_y | ϵ_z | $m \times 10^6$ | X_0 | Y_0 | Z_0 |
| AGD84 | -127 | -50 | 153 | 0.0 | 0.0 | -0.1 | 1.2 | -134 | -48 | 149 |
| DHDN | 582 | 105 | 414 | -1.0 | -0.4 | 3.1 | 8.3 | | | |
| ED50 | -102 | -102 | -129 | 0.4 | -0.2 | 0.4 | 2.5 | -87 | -98 | -121 |
| Indian | 227 | 803 | 274 | -0.4 | -0.6 | -0.4 | 6.6 | 295 | 736 | 257 |
| NAD27 | -4 | 166 | 183 | -0.3 | 0.3 | -0.1 | 0.4 | -8 | 160 | 176 |
| OSG36 | 446 | -99 | 544 | -0.9 | -0.3 | -0.4 | -20.9 | 375 | -111 | 431 |
| Pulkovo 42 | 24 | -123 | -94 | 0.0 | 0.2 | 0.1 | 1.1 | 28 | -130 | -95 |
| SAD69 | -56 | -3 | -38 | 0.1 | -0.6 | -0.2 | -0.6 | -57 | 1 | -41 |

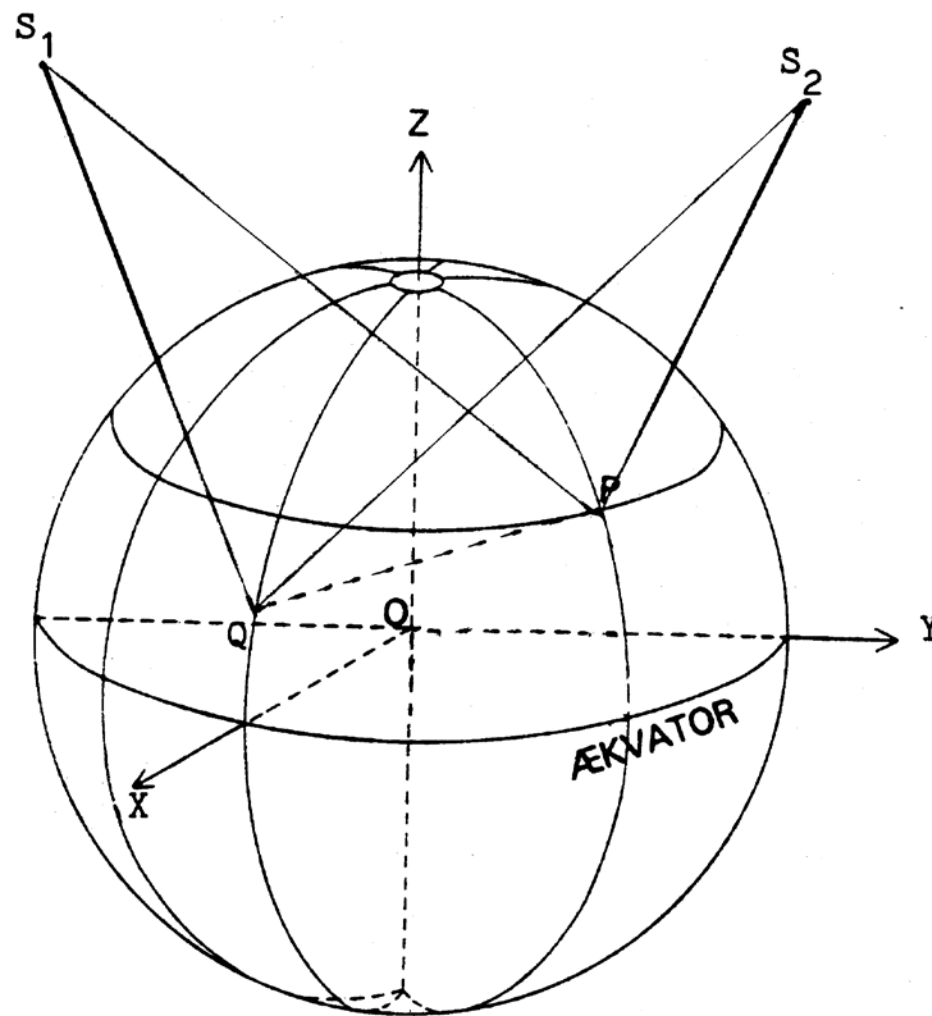


Konsekvenser:

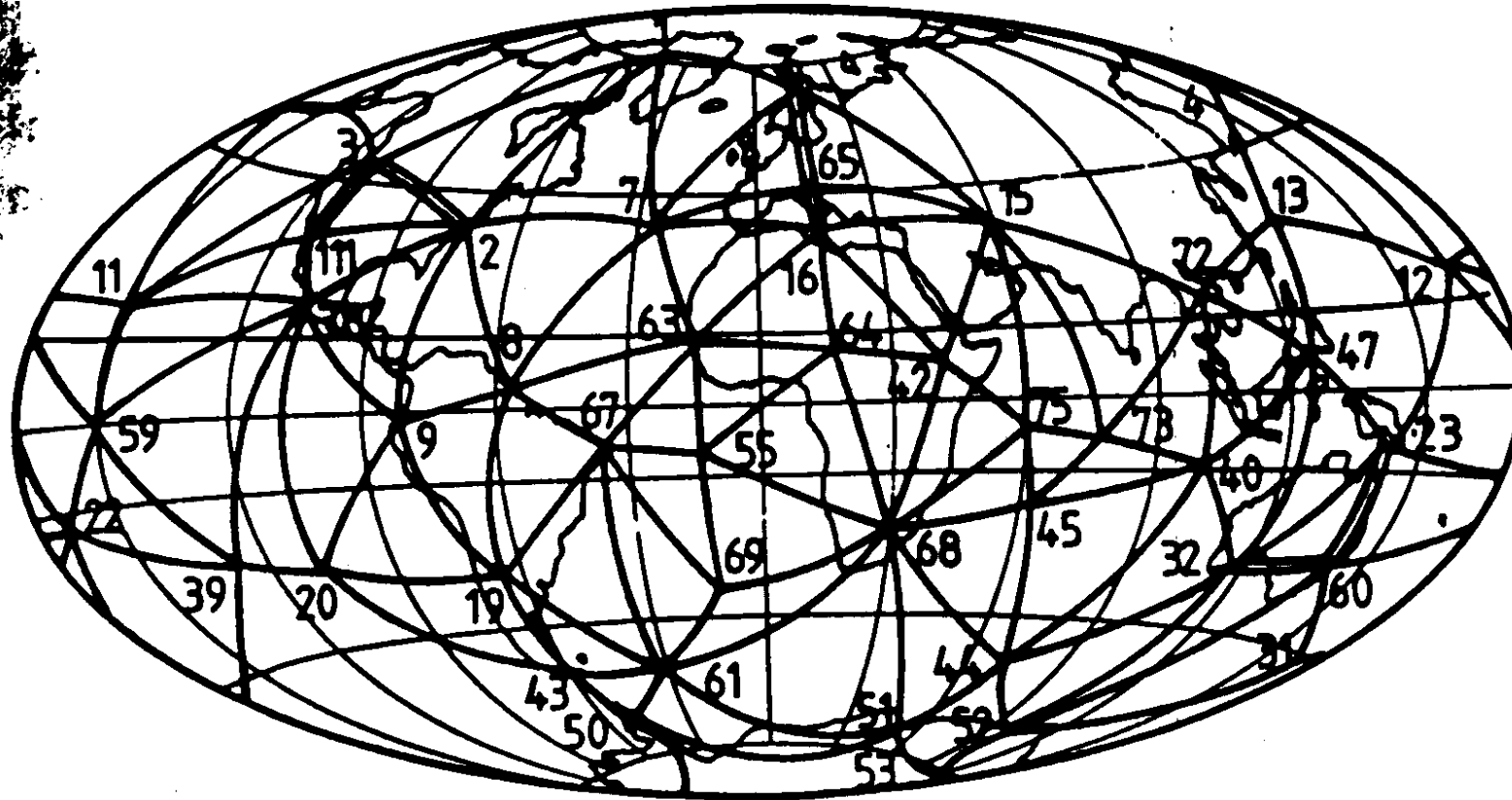
- Afvigelser fra Kepler-ellipsen kan bruges til at bestemme Jordens tyngdefelt, herunder fladtrykningen, $(a-b)/a$
- Første WGS-system i 1972. **Alle søkort opdateres.** Tyngdepunkt nu koordinat 0-punkt !
- Grønland i samme system som Nordamerika.
- DMA/NIMA/NGA beregner datum for næsten alle jordens lande. WGS84. **Datum-skift indbygget i GPS-modtagere.**



Satellit-triangulation - princip



Satellit-triangulation: Globalt ca. 1967.



Satellit-triangulation: Grønland, 1972.

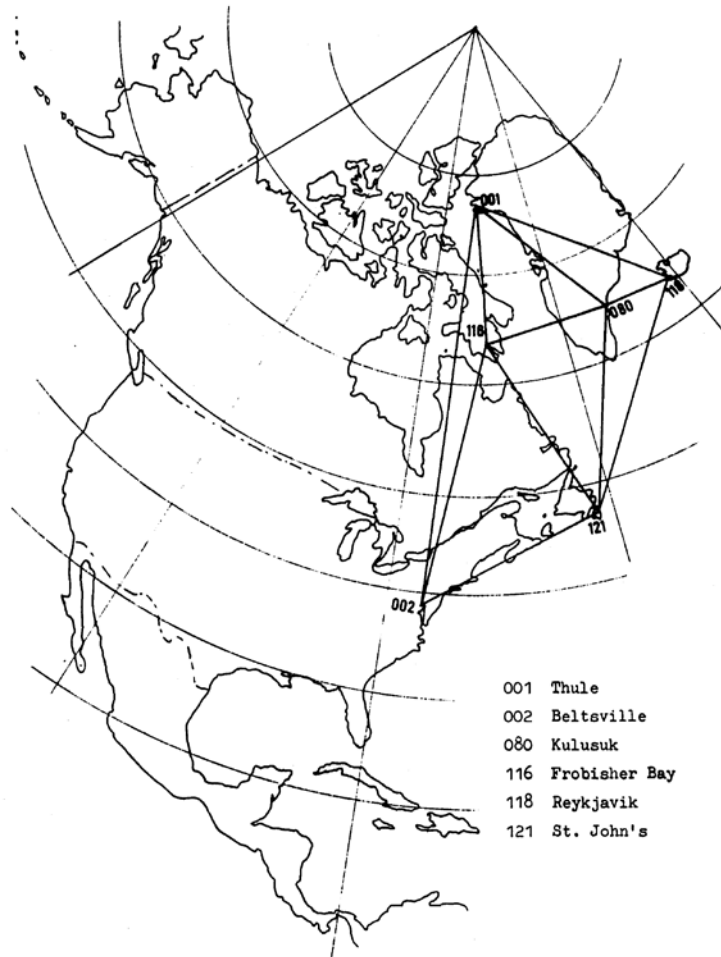


Fig. 2. Stations participating in the North American Densification Network.

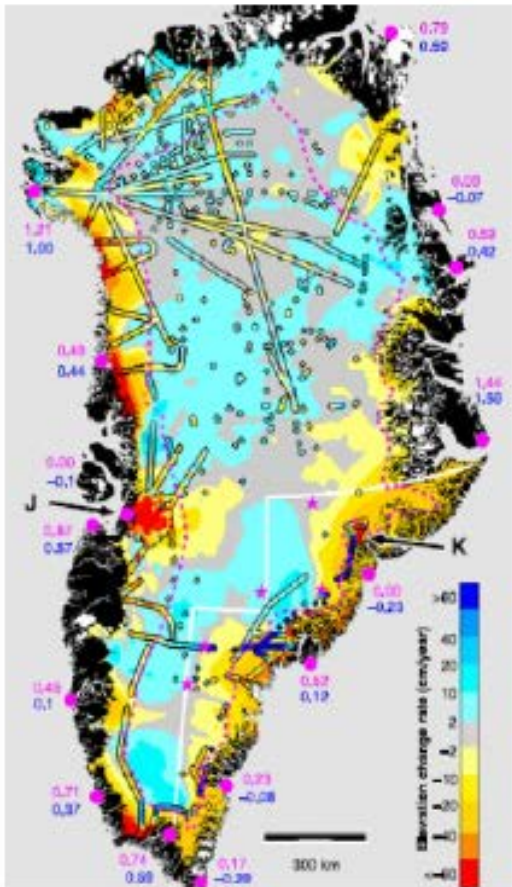


Tyngdepunkt: tidsmæssige variationer.

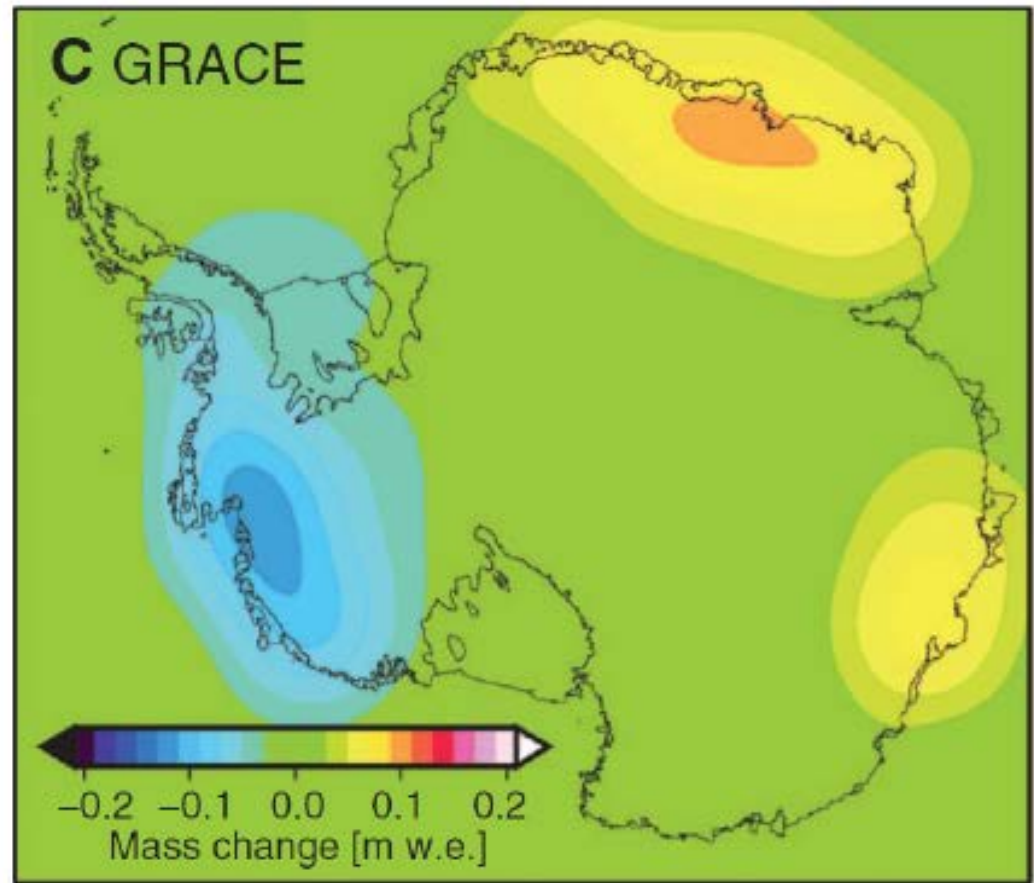
- Masserne inde i Jorden bevæger sig (magnetisk misvisnings ændring)
- Overfladen flytter sig.
- Iskapper smelter eller bliver højere
- Jordskælv flytter på masserne
- Vanddamp i atmosfæren varierer med årstiden
- Havstrømme ændrer beliggenhed



Iskappe-ændringer:



(a) The rate of GrIS elevation from aircraft laser altimetry for the period 1993-2003. (Sørensen, 2010)(2010)



(b) Estimated anomalies in mass changes derived from GRACE satellite gravimetry, over a period 2009 to 2010 relatively to 2008 to 2009. (Shepard et al., 2012)(2012)



Ændringer i Tyngdepunkt pr. År :

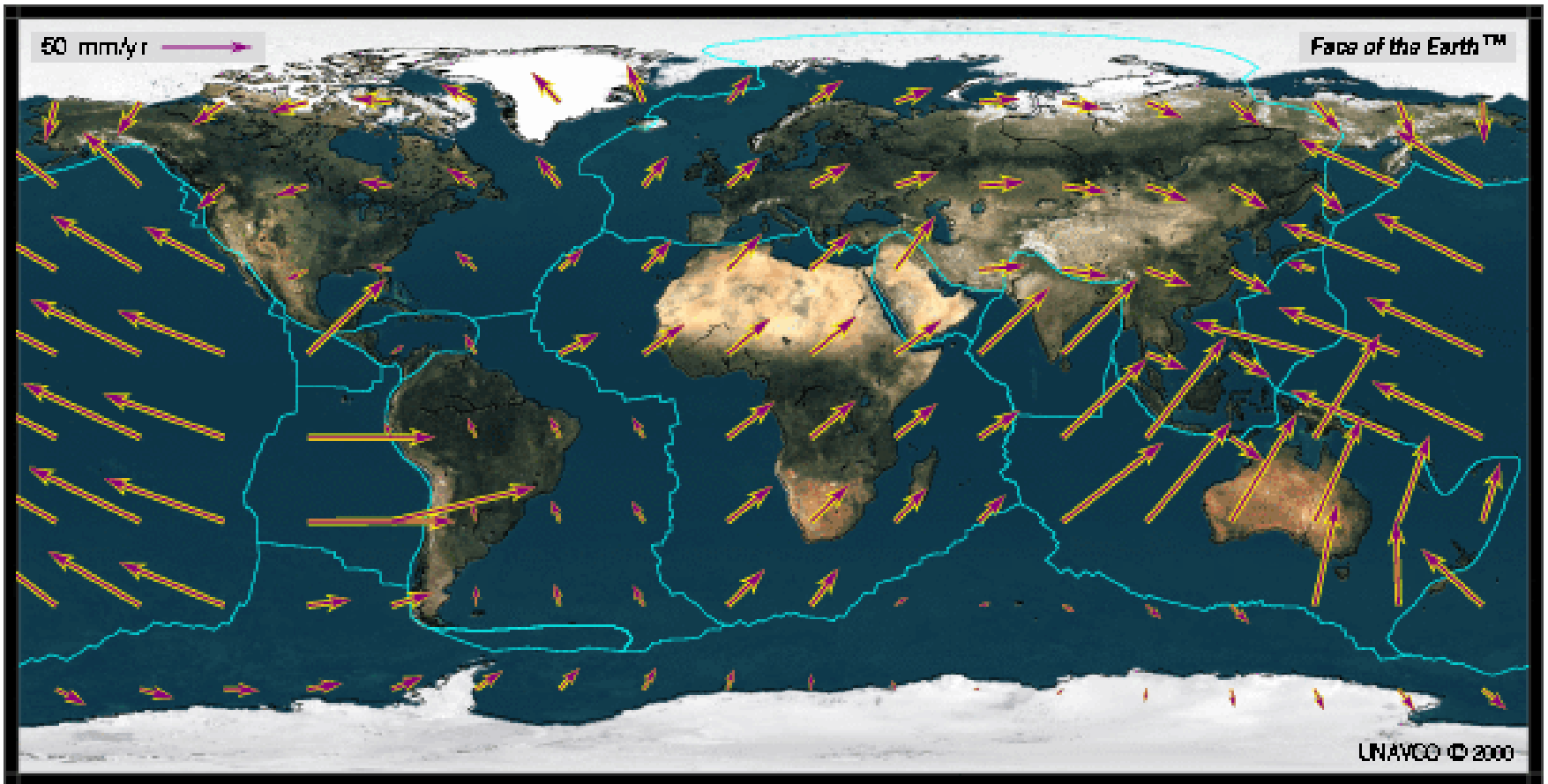
Kun bidrag fra ændring af Iskapperne:

| CM displacement [m] |
|-----------------------|
| $2.76 \cdot 10^{-4}$ |
| $8.98 \cdot 10^{-5}$ |
| $-1.55 \cdot 10^{-4}$ |
| |



Tyngdepunkt: Masse-transport.

http://www.unavco.org/community_science/science-support/crustal_motion/dxdt/images/nuvella_nnr.gif



Tyngdepunkt: Konklusion.

- Tyngdepunkt antages = Massemidtpunkt
- Der behøver ikke at være masse i tyngdepunktet
- Tyngdepunktet for Jorden eller andre legemer kan findes udfra fysiske love
- Tyngdepunktet kan flytte sig med tiden
- Tyngdepunktet godt som nul-punkt for koordinater (GPS).

