

GPS og Geodæsi.

2080

Lærere: Thomas Knudsen (e-mail thk@kms.dk), C.C.Tscherning (e-mail cct@gfy.ku.dk) og Bjarne Fog (e-mail bf@geogr.ku.dk).

Foreløbig Kursusplan forår 2000.

31.1 Forelæsning 1. CCT.

Introduktion. (Geodæsi Noter, Kap. 1, + kopier af transparenter).
Elementær matematik: vektorer, afbildninger, drejninger, projektion, matricer, afstande, vinkler i planen eller rummet, kurver i planet og i rummet (parameterfremstilling), flader i rummet.

1.2. Forelæsning 2: CCT. Kopier af transparenter.

Matematik.
Differentiation. Tangenter til kurver, Linearisering (Taylor udvikling), mindste kvadraters metode. Funktioner som vektorer. Basis-vektorer for funktioner, Fourierrække for periodisk funktion.

7.2. Øvelser 1, CCT.

8.2 Forelæsning 3, THK. Geodæsi Noter, Kap. 2.1, 2.2, Torge Kap. 3.4, afs. 3.5.5. Koordinater i rummet, på kuglen og på ellipsoiden.

14.2 Øvelser 2: THK. Matematik/koordinater

15.2 Forelæsning 4: THK, Geodæsi .Noter, Kap. 2.3, Kortprojektioner 1

21.2 Øvelser 3: THK. Kortprojektioner.

22.2 Forelæsning 5: THK. Geodæsi Noter, Kap. 2.4. Kortprojektioner 2.

28.2. Øvelser 4: THK. Kortprojektioner.

29.2 Forelæsninger 6. THK. Torge, Kap. 5.2.7, 5.4.3. + Kopier af transparenter. Interpolation og prediktion. Variogram og Kovariansfunktion. Kriging.

6.3 Øvelse 5, THK. Beregning af variogram og kovarians. Interpolation.

M1: ELEMENTÆR MATEMATIK

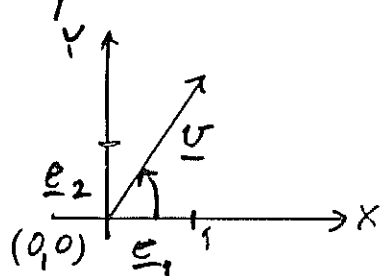
1.1. VEKTORER:

Talsæt med et antal (n) elementer.
Antallet = "Dimensionen"

$n=1$: $\{v_1\} = \underline{v}$ også kaldet skalar

$n=2$: $\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \underline{v}$ vektor i planen (Kortet)

Afbildes i Cartesisk-Koordinat system



$$\underline{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{v} = v_1 \cdot \underline{e}_1 + v_2 \cdot \underline{e}_2$$

$\underline{e}_1, \underline{e}_2$ kaldes basisvektorer. (- Andre kan vælges, så de ikke er vinkelrette på hinanden.).

$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2$ kaldes linear-kombination af $\underline{e}_1 + \underline{e}_2$

En vektor har en længde: $s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$
("Euklidisk afstand").

Og retning:

Matematik: Vinkel mellem x -akse og \underline{v} , positiv mod uret

Naturen: Nordretning. Vinkel mellem Nordgående akse, positiv mod uret. Azimut

- 7.3 Forelæsninger 7: THK Torge, dele af Kap. 2.1 og 3.3.
Tyngdefeltet. Geoiden. Højder.
- 13.3. Øvelser 6, C THK.
Tegning af geoide.
- 14.3 Forelæsninger 8. THK. Torge, Dele af Kap. 3 og Kap. 5.1,1, 5.1.2, 5.4.5.
Geodætiske referencesystemer. Datum.
- 20.3. Øvelse 7. BF.
Datumskift.
- 21.3. Forelæsning 9. THK. Torge, Kap. 4.3 og 6.1, 6.2, kopier af transparenter.
Traditionelle geodætiske målemetoder. Totalstation. Net.
- 27.3. Øvelse. 8 BF.
Beretning af plane koordinater ud fra vinkel og afstandsmåling.
- 28.3 Forelæsninger 10, THK. Torge, Kap. 4.4.7 + kopier af transparenter.
Satellitmetoder. Satellitbaner.
- 3.4 Øvelser 9, BF.
Satellitbaner.
- 4.4 Forelæsninger 11, THK. Torge, Kap. 4.4.7, kopier af transparenter.
GPS
- 10.4 Øvelse 10, BF
Positionsbestemmelse med håndbårne GPS-modtagere.
- 5-7 maj: Opmåling med GPS og Totalstation i Marken, BF, THK, CCT, JN mfl..
- Der er nogen flexibilitet mht. tidspunkter for forelæsninger og øvelser F.eks. Har jeg ikke lagt nogen i Påsken.

\underline{e} angiver \underline{v} 's retning.

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$
$$= \arctan 2(x, y)$$

Eksempel 1.3: $\underline{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{e} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\varphi = \arctan(1) = 45^\circ = \pi/4 \text{ (radianer).}$$

Så: $v_1 (= x) = s \cdot \cos \varphi$

$$v_2 (= y) = s \cdot \sin \varphi$$

I det følgende vil vi også benytte

$$s = r \text{ (radius-vektors længde).}$$

Tallene (φ, r) (eller (θ, r)) kaldes
polare koordinater.

I kortet benyttes ofte

Northing = N, Easting = E

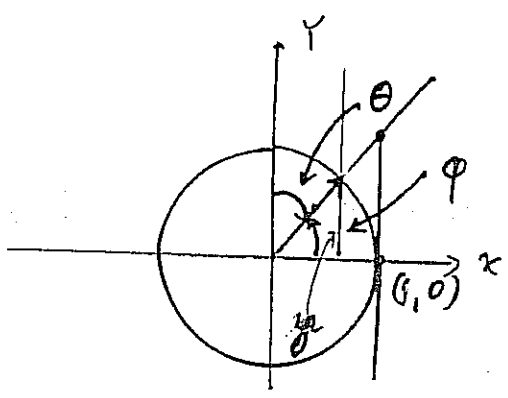
Her: $v_2 = N$, $v_1 = E$.

[Nulpunkt i UTM på Ækvator.]

I System 34 er y mod vest
x mod nord

[Fordi geografisk længde før 1940 regnedes positiv mod vest fra Rundtårn!]

Enhedsvektor $= s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$



$v_1 (=x) = \cos \varphi$

$v_2 (=y) = \sin \varphi$

$s = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$

$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$

Azimuth $\theta = 90 - \varphi$

$\cos \theta = \sin \varphi$

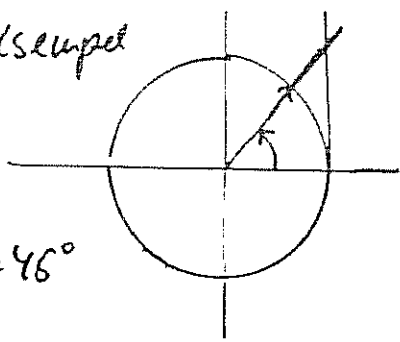
$\sin \theta = \cos \varphi$

$\cot \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}$

Eksempel 1.1

1.1

$\varphi = 45^\circ$



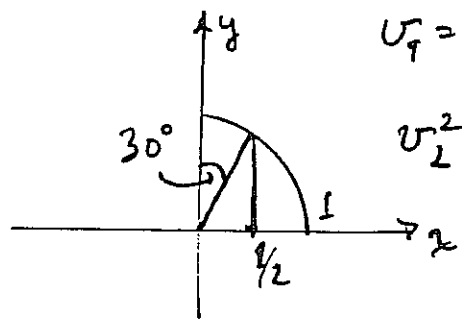
$v_1^2 + v_2^2 = 1$

$v_1 = v_2$

$\Rightarrow v_1^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Eksempel 1.2.

$\varphi = 60^\circ, \theta = 30^\circ$



$v_1 = \frac{1}{2} = \cos \varphi$

$v_2^2 + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Enhver vektor er produkt af enhedsvektor og positivt tal: $s = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$\underline{e} = \left\{ \begin{matrix} \frac{v_1}{s} \\ \frac{v_2}{s} \end{matrix} \right\}$

enhedsvektor i \underline{v} 's retning

1.2 Afbildninger af vektorer.

1.2.1 Skalar eller "•"-prøje produkt.

$$\begin{aligned} \underline{v} \cdot \underline{u} &= v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \dots + v_n \cdot u_n \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \cdot u_i \end{aligned}$$

For enhedsvektorer:

$$\underline{e}_i \cdot \underline{u} = u_i$$

Afbildning fra $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ for fastholdt \underline{v} eller \underline{u} .

1.2.2. Transponering

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \rightarrow \underline{v}^T = (v_1, \dots, v_n)$$

Skalarprodukt skrives bedst som

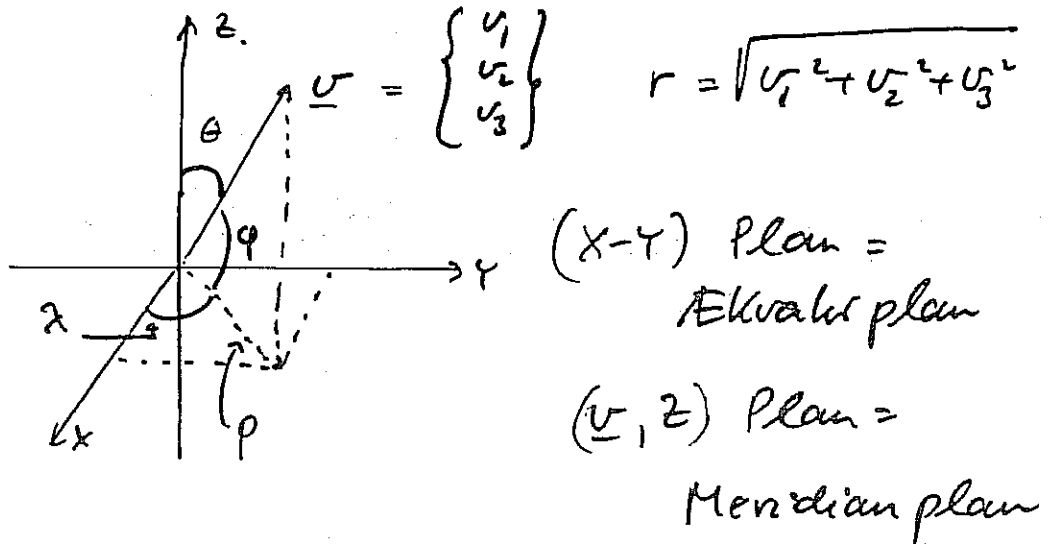
$$\underline{v} \cdot \underline{u} = \underline{v}^T \underline{u} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot u_i$$

Transponeret vektor repræsenterer

linear afbildning fra $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Resultat af afbildningen er $\underline{v}^T \underline{u}$
= "et tal"

Rumvektors ($n=3$, "3D").



I meridian planen: $\rho = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

$$r * \cos \varphi = \rho$$

$$r * \sin \varphi = z = u_3, u_3 \text{ på Ekvator pl. :}$$

$$\rho * \cos \lambda = x = u_1$$

$$\rho * \sin \lambda = y = u_2$$

\Rightarrow

$$x = u_1 = r \cos \varphi \cdot \cos \lambda$$

$$y = u_2 = r \sin \varphi \sin \lambda$$

$$z = u_3 = r \sin \varphi$$

Nordpolen / Sydpolen: $\lambda := 0$.

Generelle vektor ($n=N$)

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

Eksempel 1.4: $N=10$

Temperatur kl. 12 i 10 dage.

Højden langs en ret linie i 10 punkter med 8 km afstand.

Eksempel 1.7 $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\cos(\varphi_v - \varphi_u) = \frac{2 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}} = 0 \Rightarrow \varphi_v - \varphi_u = 90^\circ$$

Her er de to vektorer vinkelrette på

hinanden: Orthogonalitet ($\underline{v}^T \underline{u} = 0$)

$\underline{e}_u, \underline{e}_v$ har også længden 1, så de er orthonormale.

To talser $\begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} = \underline{u}, \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \underline{v}$

Kaldes uafhængige hvis

$$\sum_{i=1}^n v_i \cdot u_i = 0 = \underline{u}^T \underline{v}, \text{ dvs. } \underline{\text{covarians}} = 0$$

Korrelation: = \cos (vinklen mellem dem)

$$\rho = \frac{\text{cov}(\underline{u}, \underline{v})}{(\text{Var}(\underline{u}) \cdot \text{Var}(\underline{v}))^{\frac{1}{2}}} = \frac{\underline{u}^T \underline{v}}{((\underline{u}^T \underline{u})(\underline{v}^T \underline{v}))^{\frac{1}{2}}}$$

Hvis $\underline{u} = a \cdot \underline{v}$, a tal, så

blender $\underline{u}, \underline{v}$ lineært afhængige.

Vinklen mellem dem er 0° :

$$\cos(\varphi_u - \varphi_v) = \frac{a \cdot (\underline{u}^T \underline{v})}{(a^2 \|\underline{v}\|^2 \|\underline{v}\|^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 \Rightarrow \varphi_u - \varphi_v = 0$$

Eksempel 1.8: $N=3$

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} r_v \cos \varphi_v \cos \lambda_v \\ r_v \cos \varphi_v \sin \lambda_v \\ r_v \sin \varphi_v \end{Bmatrix}; \underline{u} = \dots$$

$$\underline{v}^T \underline{u} = r_u \cdot r_v (\cos \varphi_u \cos \varphi_v \cos(\lambda_u - \lambda_v) + \sin \varphi_u \cdot \sin \varphi_v)$$

Eksempel 1.5. $\underline{v} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$, $\underline{u} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}$
($N=2$)

$$\underline{v}^T = (1, 3)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v}^T \cdot \underline{u} = (1, 3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$$

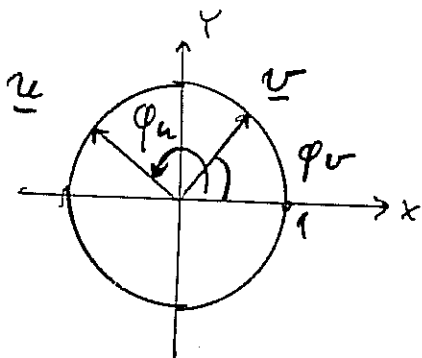
Bemærk: $\underline{v}^T \underline{u} = \underline{u}^T \underline{v}$, $(a \cdot \underline{v}^T) \underline{u} = a(\underline{v}^T \underline{u})$
 $r^2 = \underline{v}^T \underline{v}$, $(a\underline{v} + b\underline{w})^T \underline{u} = a(\underline{v}^T \underline{u}) + b(\underline{w}^T \underline{u})$.

Eksempel 1.6. $N=2$: $\underline{u}, \underline{v}$ enhedsvektorer

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_u \\ \sin \varphi_u \end{Bmatrix}, \quad \underline{v} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_v \\ \sin \varphi_v \end{Bmatrix}$$

$$\underline{u}^T \underline{v} = \cos \varphi_u \cos \varphi_v + \sin \varphi_u \sin \varphi_v = \cos(\varphi_u - \varphi_v)$$

Skalarproduktet af 2 enhedsvektorer er cosinus til vinklen mellem dem



For 2 vektorer
 Kan vi finde vinklen
 mellem dem, ved at
 danne skalarproduktet
 af deres retningsvektorer.

$$\underline{e}_v = \begin{Bmatrix} v_1 / \|\underline{v}\| \\ v_2 / \|\underline{v}\| \end{Bmatrix}, \quad \underline{e}_u = \begin{Bmatrix} u_1 / \|\underline{u}\| \\ u_2 / \|\underline{u}\| \end{Bmatrix}$$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}, \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\cos(\varphi_v - \varphi_u) = \underline{e}_v^T \underline{e}_u = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2) / (\|\underline{v}\| \cdot \|\underline{u}\|) \\ = \underline{u}^T \underline{v} / (\|\underline{v}\| \|\underline{u}\|)$$

1.2.4. lineær afbildning $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Vi tager m vektorer $i \in \mathbb{R}^n$

$$m=1: \underline{a}^T \cdot \underline{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i$$

$$m=2: \begin{aligned} \underline{a}^T \cdot \underline{v}_1 &= w_1 \\ \underline{b}^T \cdot \underline{v}_1 &= w_2 \end{aligned} \quad \underline{w} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}$$

Skrives som matrix - produkt

$$= \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}$$

$$A_{2,n} = \begin{Bmatrix} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \end{Bmatrix}$$

Matrix, dimension
(2, n) = (rækker, søjler)

Eksempel 1.9: $n=2, m=2$

$$\underline{a} = \underline{e}_1, \quad \underline{b} = \underline{e}_2$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Identitetsafb.}$$

$$\underline{a} = c \cdot \underline{e}_1, \quad \underline{b} = c \cdot \underline{e}_2$$

$$\begin{Bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Multiplikation}$$

$$\underline{a} = \underline{e}_2, \quad \underline{b} = \underline{e}_1$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{Bmatrix} \quad \text{Spejling}$$

1.2.3. Lineært vektorrum m. indre produkt.

Vi har nu beskrevet det n -dimensionale
 skal-rum som havende fgl. egenskaber:

Vektors kan adderes:

$$\underline{w} = \underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$$

Multiplieres $\underline{w} = a \cdot \underline{u}$ med tal.

Multiplieres med hinanden = skalar eller
indre produkt (ydre produkt: kryds-
 produkt)

$$\underline{u}^T \underline{v} = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{v}^T \underline{u}$$

Der findes orthonormal basis

$$\underline{e}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \underline{e}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \dots, \underline{e}_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Alle vektors er entydig linearkombination
 af basis:

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + \dots + v_n \underline{e}_n$$

Alle vektors kan opfattes som lineær
 afbildning til de reelle tal (værdi vektor):

$$\underline{v} \rightarrow \underline{u}^T \cdot \underline{v}, \quad \underline{u} \text{ fast vektor.}$$

Eksempel 1.10: Transponeret drejningsmatrix

$$A = \begin{Bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{Bmatrix}, \quad A^T = \begin{Bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Bmatrix}$$

drejes modsat.

Invers afbildning: A^{-1} ($n \times n$)

Hvis man først afbilder $\underline{v} \rightarrow \underline{u} = A\underline{v}$,

så skal $A^{-1}(\underline{u}) = \underline{v}$ eller

den sammensatte afbildning er identitetsaf

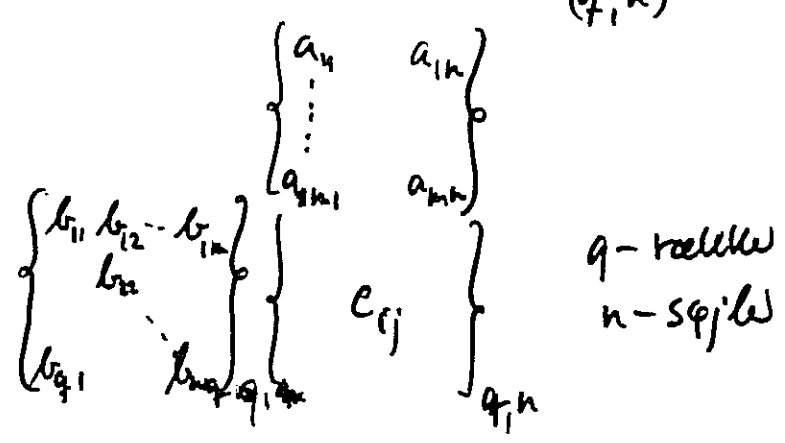
$$A^{-1}(A) = I = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Bmatrix}$$

Matrix-produkt: 2 afbildninger efter

hinanden $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, B: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$

udtrykkes ved matrix produkt: $C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$

$$C = BA = \left\{ c_{ij} \right\}_{(q,n)}, \quad c_{ij} = \sum a_{ik} b_{kj}$$



Eksempel 1.9 fortsat:

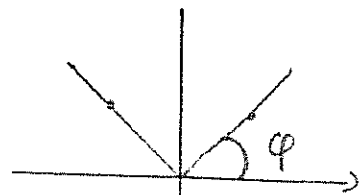
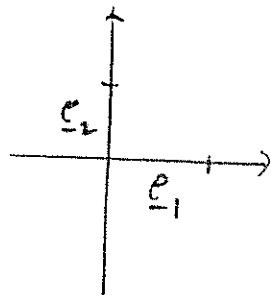
$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{Bmatrix}$$

"BAMLE"
basisvektor

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{Bmatrix}$$

"NYE"
Koordinater.

Eksempel viser hvordan vi kan udtrykke en afbildning fra en-plan til en anden, der består i en drejning:



$$e_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix}_N, e_2 \rightarrow \begin{Bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix}_N$$

Matrix:
$$= \begin{Bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ +\sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

Den transponerede matrix:

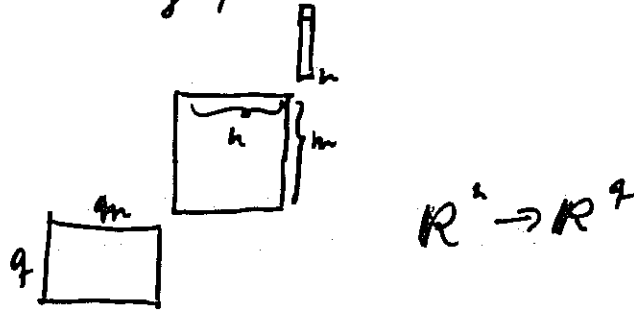
$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}_{M \times N}$$

$$A^T = \begin{Bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}_{N \times M}$$

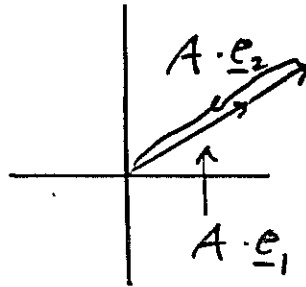
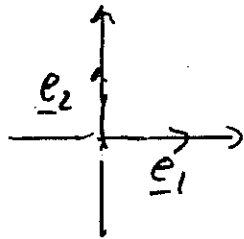
Afbilder "den anden vej"
 $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

række-inders først, eller søjle-inders sidst

Husk: ved sammensætning af
afbildninger, så skal dimensionerne passe:



Invers afbildning ikke altid entydig, $\mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^m$.
F.eks. Hvis nogle vektorer er lineært afhængige



Eksempel 1.13:

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{Bmatrix}$$

Areal udspændt af de to billedvektorer

$$\text{er } 0: \quad A = \begin{Bmatrix} a_{11} \cdot c & a_{12} \cdot c \\ a_{11} & a_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\text{Vi ser } c \cdot a_{11} \cdot a_{22} \neq c \cdot a_{12} \cdot a_{21} = c \cdot 0$$

$$A \cdot (a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = \text{Determinant} = D(A)$$

Hvis forskellig fra 0, så findes invers.

$$|D| = \text{Areal udspændt mellem } \begin{matrix} \vec{v}_2 \\ \vec{v}_1 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{Bmatrix}; \quad \text{Bem. } D(A) = D(A^T)$$

- Spejling.

Beispiel 1.11

$$A = \begin{Bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi \\ \dots & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14 & 2 \\ 9 & 0 \end{Bmatrix} = AB$$

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 3 \end{Bmatrix} = AB$$

$$B: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad C: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Beispiel 1.12: Invers abbildung

$$A = \begin{Bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{Bmatrix} \quad B = A^{-1} = \begin{Bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Bmatrix}$$

2 x 2 lineare

$$\begin{aligned} 1 \cdot b_{11} + 5 \cdot b_{21} &= 1 & 1 \cdot b_{12} + 5 \cdot b_{22} &= 0 \\ 0 \cdot b_{11} + 3 \cdot b_{21} &= 0 & 0 \cdot b_{12} + 3 \cdot b_{22} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b_{21} = 0, \quad b_{11} = 1, \quad b_{22} = \frac{1}{3}, \quad b_{12} = -\frac{5}{3} \quad \boxed{\text{Ger pr\u00fcf!}}$$

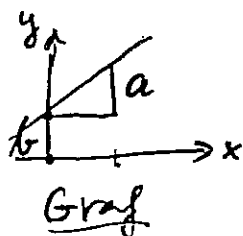
4.2. Kurver og flader i planen eller i

rummet.

1.2.1. Kurver.

$$1D. (\mathbb{R}^1) \quad t \rightarrow r(t)$$

Eksempel 1.2.1.



$$t \rightarrow \sin(t) \quad (\text{svingning})$$

$$t \rightarrow a \cdot t + b \quad (\text{ret linie})$$

$$t \rightarrow G$$

2D. (\mathbb{R}^2):

$$t \rightarrow \begin{cases} r_1(t) = x \\ r_2(t) = y \end{cases}$$

Eksempel 1.2.2

$$t \rightarrow \begin{cases} x = at + a_0 \\ y = bt + b_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} t &= (x - a_0)/a \\ y &= \frac{b}{a}x + (b_0 - \frac{b}{a}a_0) \end{aligned}$$

$$t \rightarrow \begin{cases} r \cos t \\ r \sin t \end{cases} \text{ cirkel, eller } \begin{cases} a \cos t \\ b \sin t \end{cases} \text{ ellipse}$$

$$\underline{3D} \quad t \rightarrow \begin{cases} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{cases}$$

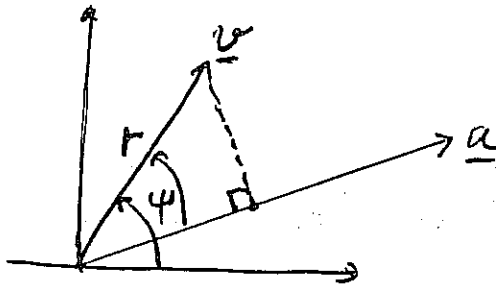
Se: eksempel 2.4.2.
i Gudsen's Noter.

Meridianer, Paraller,
Storcirkler,

Eksempel 1.2.3. Højde Kurve, $h = 20m$

$$r(t) = \begin{cases} r_1(t) \\ r_2(t) \\ 20m \end{cases}$$

Projektion:



Til a svarer

$$\text{enhedsvektor } \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} = \underline{e}$$

$$\underline{e} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_e \\ \sin \varphi_e \end{Bmatrix}$$

$$\underline{v} = r \cdot \begin{Bmatrix} \cos \varphi_v \\ \sin \varphi_v \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\underline{e} \cdot \underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \cos \varphi \Rightarrow$$

$$\text{Projektion: } r \cdot \cos \varphi = \underline{e} \cdot \underline{v}.$$

Eksempel 1.14.

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rightarrow \underline{e} = \begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \end{Bmatrix}, \text{ projektion}$$

$$\underline{v} \cdot \underline{e} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Tangent: Ret linie gennem $(x_0, f(x_0))$
med hældning $f'(x_0)$:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Ret linie, der bedst passer med
kurven $t \rightarrow (t, f(t))$

At finde tangenten kaldes

LINEARISERING.

Generelt kaldes det TAYLOR-UDVIKLING.

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

Krumningsle

Differentiations regler:

$$y = x^k, \quad y' = k x^{k-1}$$

$$y = \cos x, \quad y' = -\sin x$$

$$y = \sin x, \quad y' = \cos x$$

$$y = \tan(x), \quad y' = 1/\cos^2 x$$

$$y = \cot(x), \quad y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

Eksempel 1.2.6:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow -\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}$$

1.2.2. Flader.Afbildning fra $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+L}$ Eksempel 1.2.4 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{Bmatrix} t \\ u \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} p_1(t, u) \\ p_2(t, u) \\ p_3(t, u) \end{Bmatrix} \text{ vektor i } \mathbb{R}^3$$

Se også Kugle flade, $t = \varphi$, $u = \lambda$

Godser: Noter Eksempel 2.4.1.

Eksempel 1.2.5 Plan gennem $\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$.

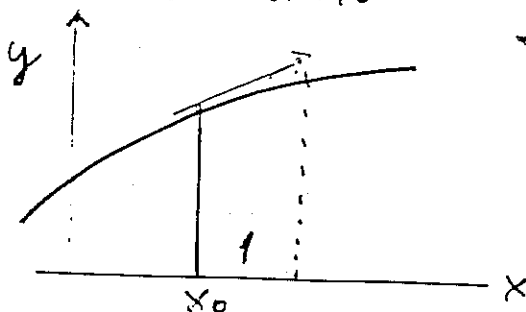
$$\begin{Bmatrix} t \\ u \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 t + b_1 u \\ a_2 t + b_2 u \\ a_3 t + b_3 u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

Matrix form:

$$\begin{Bmatrix} t \\ u \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t \\ u \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix}$$

1.2.3. Differentiation.1D: Funktion $y = f(x)$ Betrakt fast værdi x_0

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{|x - x_0|} = f'(x_0)$$



Tangentvektor

$$\left(1, \frac{df}{dx} \right)$$

2D - R² z = f(u, t)

Partiell afledede: $\frac{f(u, t_0) - f(u_0, t_0)}{|u - u_0|} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}$

$\frac{\partial f}{\partial t} \leftarrow \frac{f(u_0, t) - f(u_0, t_0)}{|t - t_0|}$

$\left\{ \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial t} \end{matrix} \right\} = \nabla f$ Gradienten af f i (u₀, t₀)

Eksempel 1-2.9. f = √(x² + y²)

$\nabla f = \left\{ \begin{matrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \end{matrix} \right\}$

$f = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \rightarrow \nabla f = \left\{ \begin{matrix} -\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \\ -\frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{x^2+y^2} \\ y \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix}$ enhedsvektor i retning $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Husk Newtons tiltrækningslov!

Eksempel i 3D, se Torque (2.1.1).

(Tyngdevektoren!)

Hastighedsvektor:

Curve: $t \rightarrow \left\{ \begin{matrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{matrix} \right\}$ (Satellitbane)

Hastighed: $t \rightarrow \left\{ \begin{matrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \\ r_3'(t) \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{dr_i(t)}{dt} \right\}$

Acceleration $t \rightarrow \left\{ \begin{matrix} r_1''(t) \\ r_2''(t) \\ r_3''(t) \end{matrix} \right\} = \left\{ \frac{d^2 r_i(t)}{dt^2} \right\}$

$$y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

$$y = a \cdot f(x) \rightarrow y' = a \cdot f'(x)$$

$$z = f(g(x)) = f(y) \rightarrow z' = f'(y) \cdot g'(x)$$

$$y = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow y' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x)g(x)$$

$$y = f(x)/g(x) = f(x)g(x)^{-1} \rightarrow y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Exempel 1.2.7

$$y = \sqrt{(x-x_0)^2} \rightarrow \frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2}}$$

$$y = \sin 2x \rightarrow 2 \cdot \cos(2x)$$

Omvendt funktion $y = f^{-1}(x)$, $y' = \frac{1}{f'(x)}$
(arccos, arcsin, arctan...)

Exempel 1.2.8

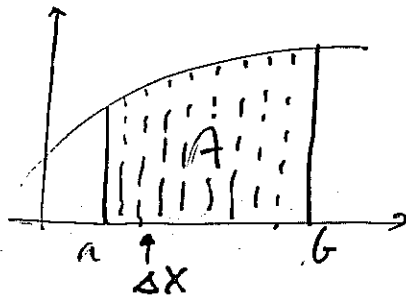
$$y = \arcsin(x), \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$(x = \sin y)$

$$y = \arctan x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

"Den afledede" = Differential kvotient
= hældning = "gradient"

1.2.4. Integration.

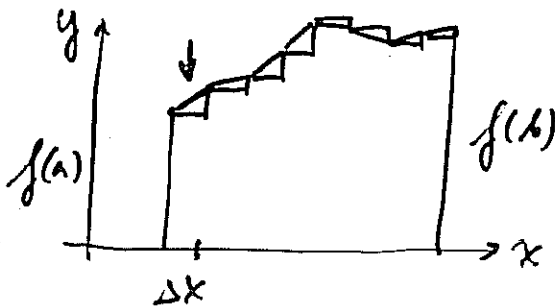


$$A = \sum_{i=1}^N f(x_i) \cdot \Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$N = \frac{b-a}{\Delta x}$$

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Udregnes ofte v. h. af stamfunktion:



$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{f(x_i - \frac{\Delta x}{2}) - f(x_i)}{\Delta x}$$

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^N \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Hvis ~~de~~ varierer $f(x) = \int_a^x f'(x) dx + f(a)$

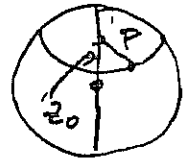
Vi glæmmer nu 'f(a)':

$$f' = x^{n-1} \rightarrow f = \frac{1}{n} x^n$$

$$f' = \cos x \rightarrow f = \sin x$$

$$f' = \sin x \rightarrow f = -\cos x$$

Eksempel: 1.2.10. Cirkelbevægelse med
vinkelhastighed ω . $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$t \rightarrow \begin{cases} p \cdot \cos(\omega t) \\ p \cdot \sin(\omega t) \\ z_0 \end{cases}$$


Hastighed $t \rightarrow \begin{cases} \omega p \cdot \sin(\omega t) (-1) \\ \omega p \cdot \cos(\omega t) \\ 0 \end{cases}$

Acceleration $t \rightarrow \begin{cases} -\omega^2 p \cdot \cos(\omega t) \\ -\omega^2 p \cdot \sin(\omega t) \\ 0 \end{cases}$

Accelerationens størrelse: $\omega^2 \cdot p$
se Torqe (2.1.8). Centrifugal Kræfter.

Gradient af funktion: $\Phi = \frac{\omega^2}{2} r^2 = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)$

$$\nabla \Phi = \begin{cases} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} \omega^2 p \cos(\omega t) \\ \omega^2 p \sin(\omega t) \\ 0 \end{cases}$$

Centrifugal-potentialet.

Årsag til Jordens Fladtrykning.

1.2.6. Vektorrum af funktioner.

Til polynomium af grad n svarer en vektor med $n+1$ elementer:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{Bmatrix} = \underline{\text{Koordinater}}; \quad x^i - \underline{\text{basisvektori}} \underline{e}$$

Eksempel 1.2.11. $n=3$

$$e_0 = 1, \quad e_1 = x^1 = x, \quad e_2 = x^2.$$

Vi har 3 værdier $f(-1) = 2, f(0) = 1, f(1)$

Ubekendt er a_0, a_1, a_2 :

Bestemmes ved at løse 3 lign. med 3 ukb.

$$a_0 + (-1)a_1 + 1 \cdot a_2 = 2$$

$$a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 1$$

$$a_0 + 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = 3$$

$$\text{Matrix: } \begin{Bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

$$\underline{\text{Løsning}}: \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$$

Passer "måske" for $[-1, 1]$, men "drevs" så ud af!

$$f(x) \text{ koordinater er: } \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

1.2.5. Generelle funktioner.

Polynomier: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
 $= \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$

Horner-skema $= x(a_n + x(a_{n-1} + x(\dots))) + a_0$
 $(\dots((a_n - x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots + a_0)$

Normalt ikke brugbare, fordi de
 "skittes af" ved uendelig. Nulpunkters
 fordeling $-\infty < x < \infty$

I stedet konstrueres "orthogonale polynomier"

tilpasset et interval: (Toeng 2.3.3)

Legendre $[-1, 1] \approx [-90^\circ, 90^\circ]$

Tchebychev $[0, 1]$

Trigonometriske polynomier. Periodiske
 funktioner $[-\pi, \pi]$ eller $[0, 2\pi]$.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_{-1} \sin x + a_2 \cos 2x + a_{-2} \sin 2x + \dots$$

$$= \sum_{i=0}^N (a_i \cos ix + a_{-i} \sin ix)$$

Bem.: til givet N er der $2N+1$ basisfunktioner: $\cos ix, \sin ix$!

$$a_0 + \frac{1}{2} a_1 + a_{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$$

$$a_0 + a_1 + 0 = 1$$

$$a_0 + \frac{1}{2} a_1 + a_{-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Matrix-form

$$\begin{Bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_{-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$a_0 = 1 + \dots, \quad a_1 = 0, \quad a_{-1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

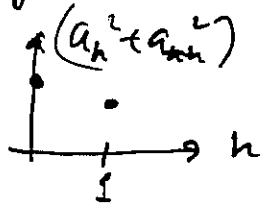
$$\underline{f(x) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin(x)}$$

Tallene $\left(1, 0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$: Diskret Fouriertransform

$$f'(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos x$$

- Afledede meget lette at regne

$$\text{Power-spektrum: } \left(1, 0^2 + \frac{4 \cdot 3}{9}\right) = \left(1, \frac{4}{3}\right)$$



Hvis nogen værdier er
meget store end andre
så dampes de:

Filtrering.

Normen of funktion: $f(x) = \sum_{i=1}^N a_i f_i(x)$
 $g(x) = \sum_{i=1}^N b_i f_i(x)$
 $\|f\|^2 = \sum_{i=1}^N a_i^2$

Intra produkt: $(f, g) = \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i$

Norm of funktion \rightarrow mange slags.

$$\frac{1}{b-a} \sum f(x_i)^2 \cdot \Delta x \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx$$

Også: $\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x))^2 dx$, $\frac{1}{b-a} \int_a^b (f''(x))^2 dx$
 "Glatthed", "Krumning"

Little norm: Glat funktion.

For $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\frac{1}{2\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^2 dx = 1$

$$\frac{1}{2\frac{\pi}{4}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin x)^2 dx = 1$$

Trigonometriske funktioner er
 orthogonal basisvektorer i $2k+1$
 dimensionalt rum.

Data $f(x_i)$, $x_i = -\pi + (i - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{N}$

Eksempel 1.2.12, $N=3$ $x_1 = -60^\circ$, $x_2 = 0^\circ$, $x_3 = 60^\circ$

$$f(x_1) = 2, f(x_2) = 1, f(x_3) = 0$$

$$a_0 + a_1 \cos(-60) + a_2 \sin(-60) = 2$$

$$a_0 + a_1 \cos(0) + a_2 \sin(0) = 1$$

$$a_0 + a_1 \cos(60) + a_2 \sin(60) = 0$$

