Københavns Universitet
Niels Bohr Institutet for Astronomi, Fysik og Geofysik
Geofysisk Afdeling

4074

26. oktober 1993

Statistiske modeller for tyngdefeltet.

Forelæsningsnoter af

Carl Christian Tscherning.

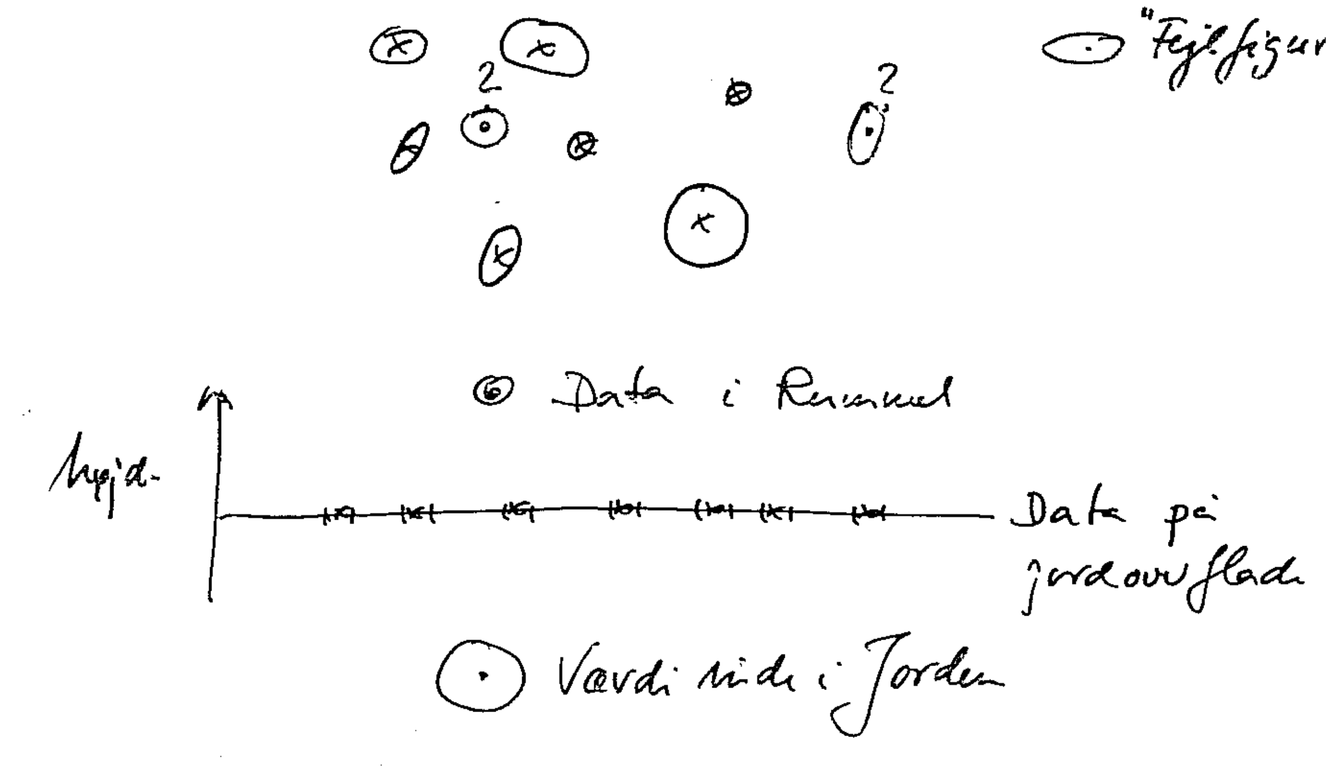
27. Oct. 93

Statistiske modeller for tyngdefeltet

Baggrund:

Vi ønsker ud fra observationer (dvs. data med fejl) at give bedste skøn for andre størrelser, og for fejlen på disse skøn.

Eksempel: Interpolation, Ekstrapolation

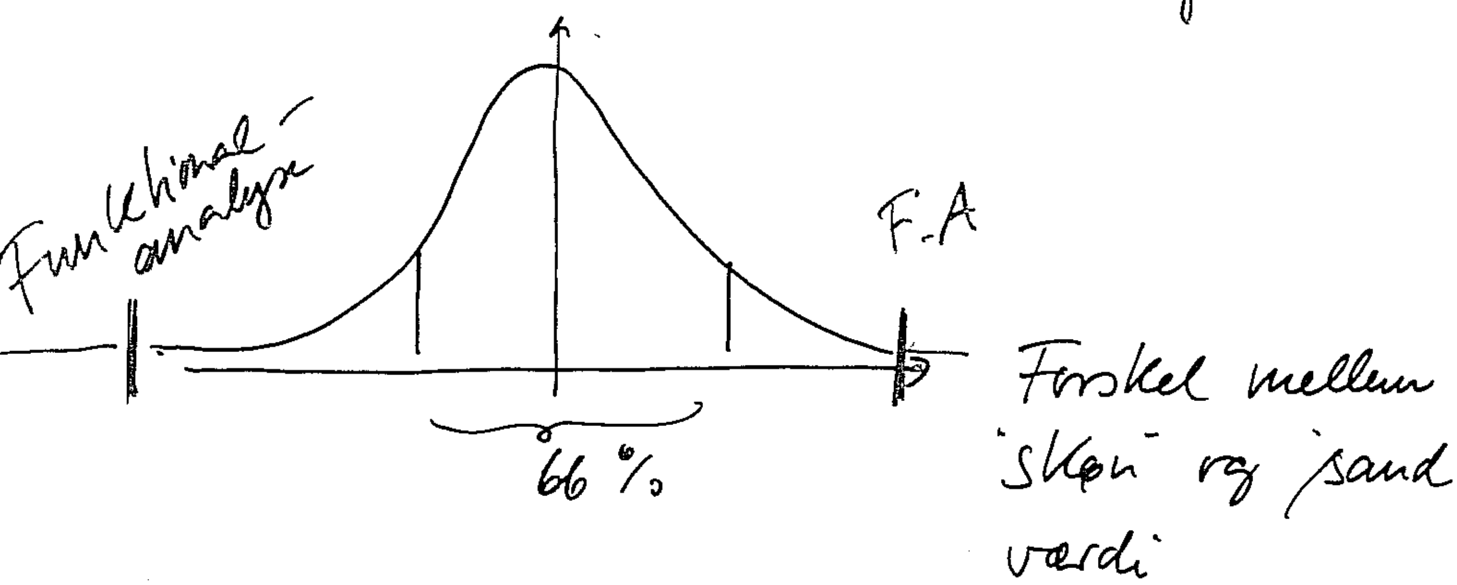


Funktionalanalyse ⟹ Metoder til

Interpolation
Extrapolation } + Øvre fejlgrænse
Approximation

+ Mere a-priori information, om observations datas statistiske fordeling

⟹ Skøn for fejlenes fordelings-funktion



Statistik kræver gentagelser –
Men vi har kun en Jord.

Løsning i statistisk mekanik:

Gentagelser i tiden =
Gentagelser i rummet (stedet)

Forudsætter "Ergodicitet".

Det der til tiden t var i P
vil efter $t+\Delta t$ være i Q
Så ved at gentage målingerne i Q
får vi et skøn for den rumlige
fordeling.

Men tyngden ændrer sig ikke
ret meget med tiden (bortset
fra effekt af sol og måne) –
Hvad gør vi så?

Repetition af nogle statistiske grundbegreber.

Normalfordelte størrelser

Karakteriseret ved middelværdi,
variaus
Kovarians / Korrelation

$\bar{X} = E(X)$ - Skøn: $\hat{E}(X) = \frac{\sum^n X_i}{n}$

$VAR(X) = E(X^2)$ - - $= \frac{\sum^n X_i^2}{n}$

$COV(X, Y)$ - Skøn $\widehat{COV}(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \cdot Y_i}{n}$

$\hat{\rho} = \frac{\widehat{cov}(X, Y)}{(\widehat{VAR}(X) \cdot \widehat{VAR}(Y))^{\frac{1}{2}}}$

Svarer nøje til indførelse af norm og indre produkt i lineært vektorrum.

IKKE AF FUNKTIONER

MEN AF FUNKTIONALER

Eksempel: Stokastisk variabel X

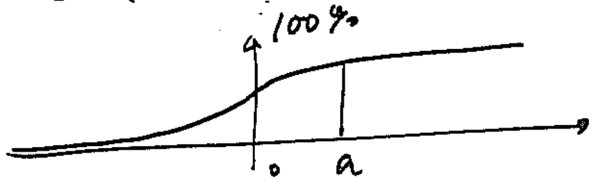
Er den afbildning, der for et muligt tyngdefelt giver tyngden i punktet

$X \rightarrow |\nabla_X V| = \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_X}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Hvordan bliver X en stokastisk variabel

<u>Vi skal "kende" en fordelingsfunktion</u>

$\mathcal{P}(X : V \to \mathbb{R} \le a)$



Tyngden er med 80% sandsynlighed $< 100 \times 10^{-5}\ m/s^2$ i et givet punkt.

Hvordan bliver tyngdepotentialet V så en stokastisk process eller "tilfældig" funktion?

(a) En fordelingsfunktion skal være givet for (alle) lineære funktionaler. Minimum for evalueringsfunktional

Ω

Jorden

$V(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad x \in \Omega$

$X(V) = V(x)$ — V's værdi i

<u>Og de skal have endelig VARIANS.</u>

$\xrightarrow[\text{Tiden}]{\Omega} t$

(b) Vi skal også kende de "simultane" fordelinger
$$\mathcal{P}(V(X) < a, V(Y) < b)$$

<u>Eksempel</u>: Sandsynligheden for at tyngde i X er $< 10 \times 10^{-5}\ m/s^2$ og i Y er $< 20 \times 10^{-5}\ m/s^2$ er 20 %.

Hvis størrelserne er normalfordelte, og vi kender kovarianserne, så har vi stokastisk process. (Alle sandsynligheds fordelinger er kendte!)

I sådanne processer kan man finde bedste lineære skøn for værdien af lineære funktionaler (med endelig varians) der kan udtrykkes som linearkombination (endelig eller ∞) af evalueringsfunktionalerne.

Bedste (lineær) skøn :

$$\widehat{Y}(V) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \underbrace{X_i(V)}_{\text{observationer}}$$

$$\left\{\alpha_i\right\}_N = \left\{\mathrm{COV}(Y, X_i)\right\}_N^T \left\{\mathrm{COV}(X_i, Y_j)\right\}_{N \times N}^{-1}$$

C_{YX} C_{XX}

$$\hat{Y}(V) = C_{YX}^T \, C_{XX}^{-1} \, X \quad \boxed{\Rightarrow \underline{\underline{\hat{X}_i = X_i}}}$$

COLLOCATION

Fejlskøn:

$$\sigma^2(\hat{Y}(V) - Y(V)) = \underline{\underline{VAR(Y) - C_{YX}^T \cdot C_{XX}^{-1} \cdot C_{YX}}}$$

Skøn Sandværdi

Hvis data har fejl, så adderes fejlens Varians-Kovarians-matrix til C_{XX}

<u>Eksempel:</u> Kendes $X(V)$ for alle x, så også

$$\underbrace{\frac{\partial'}{\partial z}V\Big|_x = \lim_{X_i \to X} \frac{V(X_i)-V(X)}{|X_i - X|}}_{\text{Tyngden}} \quad (X_i \to X \text{ langs } z\text{-aksen})$$

Da tyngdefeltet er harmonisk

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0$$

Kan man fra tyngden på Jordoverfladen

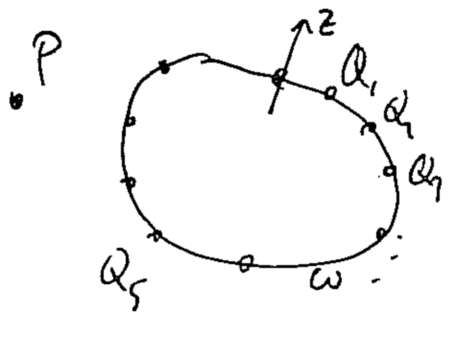
$$\frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{finde } V$$

ved ~~et~~ integral (Stokes Formel)

$$X_p(V) = \int_\omega S(P,Q) \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_Q \, d\omega$$

Integralet er grænseværdi for linear-Kombination

$$V(P) = X_p(V) \simeq \sum S(P_i, Q_i) \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{Q_i} \Delta\omega_i$$



Hvordan fastlægges vi $\mathcal{P}$?

En mulighed : Fourier-analyse

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \qquad (f_i, f_j) = \delta_{ij}$$

Hver Fourier-koefficient
(muligvis)
normalfordelt med varians = 1

Dur ikke :

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

Kan vi istedet finde kovariansfunktionen udfra observationer ?

$$cov(X, Y) = \frac{\sum V_k(X) \cdot V_k(Y)}{n} \quad ?$$

Men vi har ikke n gentagelser af potentialet !!

Inspiration fra stationære processer:

Korrelation ikke afhængigt af to tidspunkter, t_1 og t_2 men af tidsforskellen, $\Delta t = |t_1 - t_2|$.

$\boxed{\text{Stationær tidsserie}}$

$$\mathrm{cov}(\Delta t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+\Delta t)\,\overline{f}(t)\,dt$$

(Foldning)

$$f = \sum a_n e^{i\lambda_n t}$$ Spectral representation

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t+\Delta t)\,\overline{f}(t)\,dt$$
$$= \sum |a_n|^2 e^{i\lambda_n(\Delta t)}$$

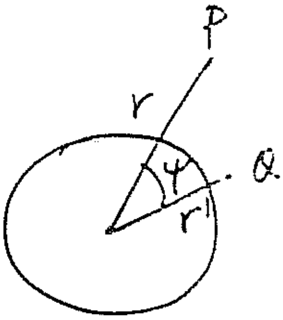
a_n^2 = <u>Power-spectrum</u>

I rummet udenfor Kuglen, eller på Kuglen: ISOTROPI

Kovariansen afhænger af

(1) Sfærisk afstand og (måske

(2) Afstanden fra origo.

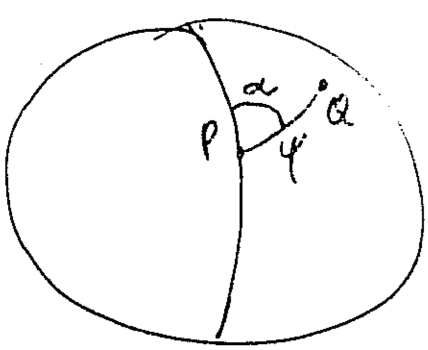


$$cov(V(P), V(Q)) \equiv cov(\psi, r, r')$$

Vi får gentagelser ved at dreje Jorden om origo (tyngdepunktet).

Skøn:

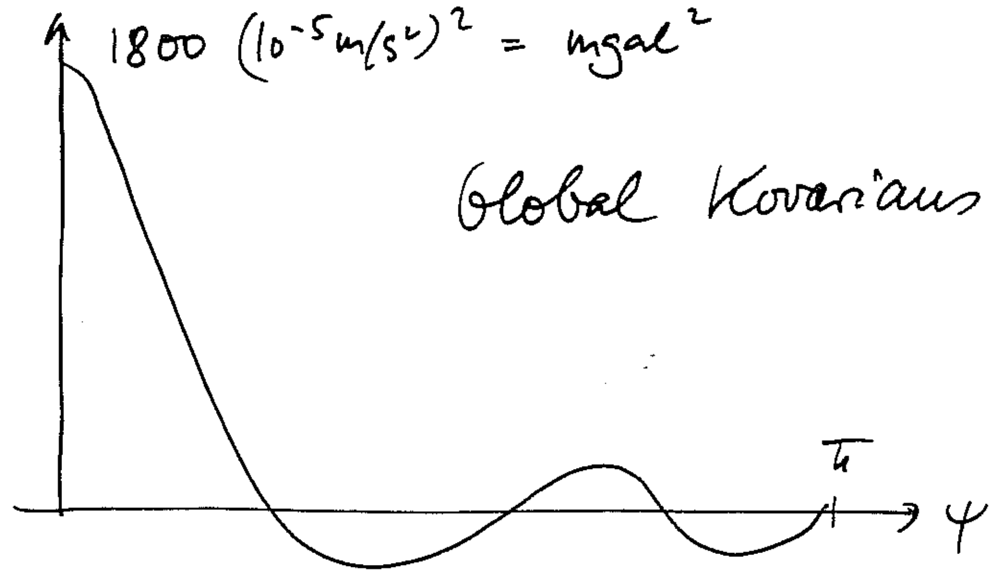
$$\widehat{cov}(V(P), V(Q)) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} V(\varphi, \lambda, r) V(\varphi', \lambda', r') \, d\varphi \cdot d\lambda \cdot d\alpha$$



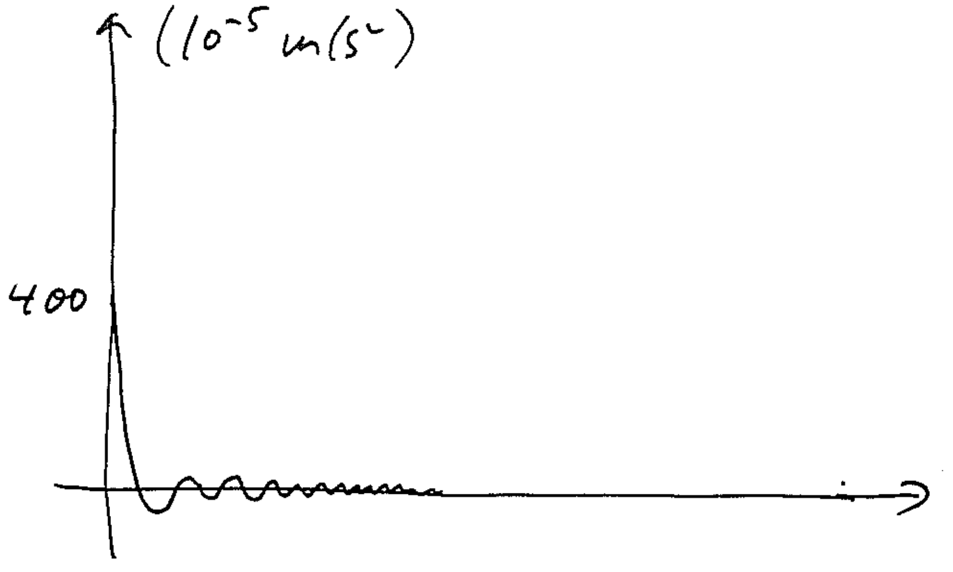
$$= \widehat{cov}(\psi, r, r')$$

Middel

I praxis: Sum af produkter af værdier, der har afstand $\psi_i < \psi < \psi_i$



Fjern lave frekvenser (de-Korrelation



$$\mathrm{cov}(V(P), V(Q)) = \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_i^2 P_i(\cos\psi)$$

P_i : Legendre polynomier

σ_i^2 : Power-spectrum ≡ Degree-Varians

$$V(\varphi,\lambda,r) = \sum \frac{GM}{r}\left(\frac{R}{r}\right)^{i} \sum_{j=-i}^{i} C_{ij}\, Y_{i}(\varphi,\lambda)$$

$$Y_{ij}(\varphi,\lambda) = \bar{P}_{ij}(\sin\varphi)\begin{cases}\cos j\lambda\\ \sin j\lambda\end{cases}$$ Overflade Kugle-Funktioner

$$\sigma_i^2 = \left(\frac{GM}{R}\right)^2 \sum_{j=-i}^{i} \bar{C}_{ij}^{\,2}$$

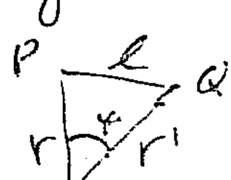
<u>For tyngden</u> $\frac{\partial}{\partial r}$: Multiplicer spektral med $\left(\frac{-i-1}{r}\right)^2$

$$\boxed{\text{For at fremstille } cov(P,Q) \text{ skal vi kende } \infty \text{ mange } \sigma_i^2}$$

Kan vi finde σ_i^2 så $cov(P,Q)$ bliver pæn ?

$$\frac{1}{(r^2+(r')^2-2rr'\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{l} = \frac{1}{r'}\sum\left(\frac{r}{r'}\right)^{i} P_i(\cos\psi)$$

Hvis $\sigma_i^2 = 1$ så pæn funktion, men ∞ for $\psi = 0$



Kaula 1959 bestemte først 32 σ_n^2.

Fandt Kaulas "lov"

$$\sigma_n^2 \simeq \frac{A}{n^3}$$

For tyngder $\quad \sigma_n^2(\Delta g) = \frac{B(n-1)^2}{n^3} \simeq \frac{B}{n}$ $\quad \simeq \frac{\partial V}{\partial r}$

Men variansen

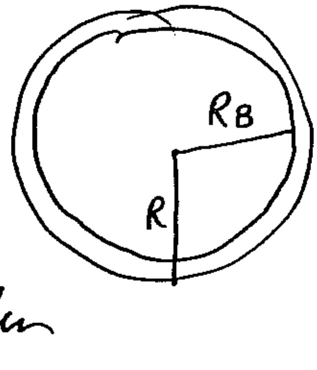
$$VAR(\Delta g) = \infty$$

hvis dette er korrekt

Hvordan klarer vi det ?

$$\sigma_n^2 \simeq \frac{A}{n^3} \cdot q^n \quad , q < 1$$

$$q = \frac{R_B^2}{R^2}$$



R_B : Radius for Kugle inde i Jorden

$\equiv$ V er harmonisk ned til den indre kugle !!

Oprindeligt udgangspunkt:

$$\hat{Y}(v) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i(v)$$

Vi ønsker at bestemme α_i, så "Kvadratfejlen" bliver mindst mulig - For alle punktfordelinger, af samme slags ≡ identiske efter rotation

Konsekvens:

$$\{\alpha_i\} = \{COV(Y, X_i)\}^T \{COV(X_i, X_j)\}^{-1}$$

OG AT

$$\boxed{COV = \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_n^2 P_n(\cos\psi)\left(\frac{R^2}{rr'}\right)^{n+1}}$$

For EVALUERINGS-FUNKTIONALER

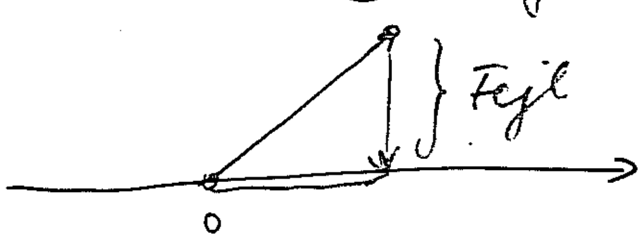
Kovarians for andre størrelser udtrykt ved lineære funktionaler L_1, L_2

$$COV(L_1(v), L_2(v)) = L_1(L_2\, COV(X, Y))$$

(OFTE GENMEM SPEKTRET $\sigma_n^2(\Delta g) = \left(\frac{n-1}{r^2}\right)^2 \sigma_n$

Samme formel findes ved at stille opgaven som approximation i <u>Hilbertrum</u>.

Bedste approximation i endelig-dim. rum



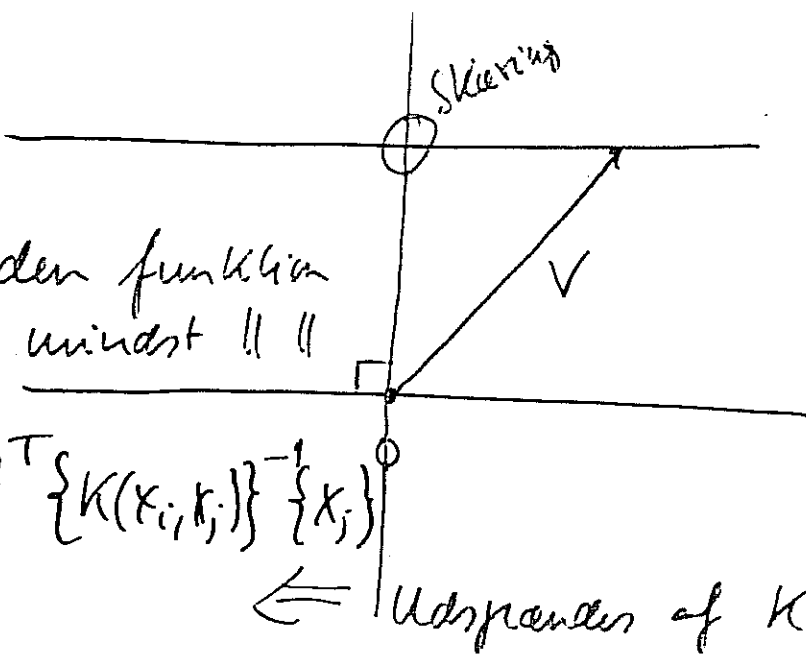
Under-rum udspændt af basisvektorer, f_i, $(f_i, f_j) = \delta_{ij}$

$$\tilde{V}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$$

$\alpha_i = (V, f_i)$ Fourier-koefficient

I ∞-dim rum, med N observationer

Entydig løsning (hvis lineart uafhængig obs.)



Side-underrum der stemmer med observationer ∞-dim !!

$\hat{V}$ – den funktion der har mindst $\| \, \|$

$$\hat{V} = \{K(Y, X_i)\}^T \{K(X_i, X_j)\}^{-1} \{X_j\}$$

$\Leftarrow$ Udspændes af $K(Y, X_i)$, X_i = ob

$K(X,Y)$: Reproducerende Kerne

$$\left(K(X,Y),\ f(X)\right) = f(Y)$$

Løsningsmetoden igen $\tilde{V}(X_i) = V(X_i)$

Mindste Norm Kollocation

$$|V(X) - \hat{V}(X)| \le \|V\| \left(K(X,X) - \{K(X,X_i)\}^{-1} \{K(X_i,X_j)\} \{K(X,X_i)\} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Maximal grænse for fejl

Men hvordan skal Norm og indre produkt vælges ??

Så $K(X,Y) = COV(X,Y)$,

FORDI VI SÅ FÅR BEDSTE MINDSTE KVADRATERS LØSNING

—MEN $\|V\| = \infty$!!

Anvendelse i andre områder:

Magnetfelt

Inverse problemer / Seismik

Atmosfære – tryk, temp., fugtighed

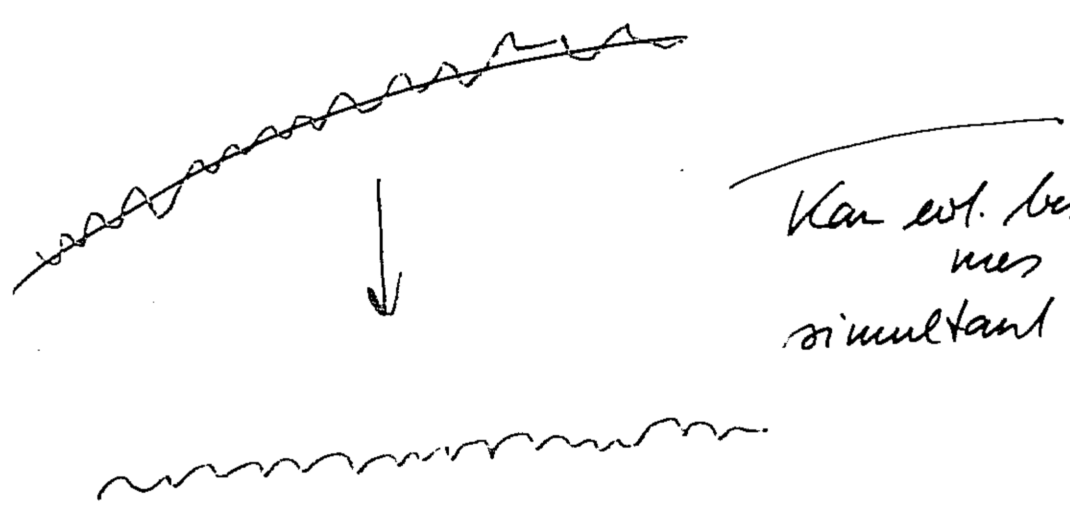
Havvand saltindhold, –

Hastighed af strømme

Land hævninger + sænkninger + forskydn.

Is – – –

Fordele "Randomisering"



Kan evt. bestemmes simultant !