

Nouvelles Solutions pour le Géoïde gravimétrique Belgique-Luxembourg

Z. Jiang¹, C. Poitevin² et C.C. Tscherning³

1: Institut Géographique National, France

2: Observatoire Royal de Belgique, Belgique

3: Université de Copenhague, Danemark

Résumé

Par la méthode de Stokes modifiée et l'intégration classique (sommation directe), nous avons obtenu un premier résultat pour le quasi-géoïde gravimétrique de la Belgique-Luxembourg en novembre 1994 (Jiang et al. 1994, Poitevin et al. 1995). Par la méthode de collocation (Tscherning 1994) et une nouvelle méthode d'intégration rapide (Jiang et Duquenne 1995b), nous avons récemment calculé deux nouvelles solutions. Nous avons ensuite adapté le quasi-géoïde gravimétrique obtenu aux 32 points GPS nivelés par compensation en combinant la solution gravimétrique et les points GPS nivelés (Jiang et Duquenne 1995a). L'estimation de l'erreur est déduite par des méthodes différentes.

Abstract

New determination of the Belgium-Luxembourg geoid

The first Belgium-Luxembourg gravimetric quasi-geoid determination has been carried out on November 1994 (Jiang et al. 1994, Poitevin et al. 1995) and the modified Stokes' method with straightforward summation has been used. Using the collocation method (Tscherning 1994) and a new fast integration method (Jiang and Duquenne 1995b), we have recently obtained two new solutions. Then the determined gravimetric quasi-geoid has been adjusted to 32 GPS levelling points using a combined adjustment method proposed in (Jiang and Duquenne 1995a). Error estimation for the determined geoid is calculated with different methods.

Table des matières

1. Introduction	2
2. Rappel de la méthode de la collocation	2
3. Calculs numériques	5
3.1 Retrait	6
3.2 Restauration	7
3.2.1 Solution de l'intégration rapide de l'intégrale de Stokes	7
3.2.2 Solution de la collocation	8
3.3 Adaptation du quasi-géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés	9
3.3.1 Transformation de similitude à 4 paramètres	9
3.3.2 Compensation combinant quasi-géoïde gravimétrique et points GPS nivelés	10
3.3.3 Précision relative	11
4. Conclusion	12
Remerciements	13
Référence principale	13
Annexe 1. Rappel de la méthode d'intégration rapide	13
Annexe 2. Rappel de la compensation combinée	13

1. Introduction

- Ce travail a pour but de tester différentes méthodes et différents logiciels pour la détermination du géoïde de la Belgique et du Luxembourg en utilisant la méthode de retrait-restauration.
- Nous avons utilisé les mêmes données que celles qui ont servi à (Jiang et al. 1994 ou Poitevin et al. 1995). Les données suivantes sont disponibles en Belgique et dans les pays voisins:
 - 32 points GPS nivelés (en Belgique) avec une précision de 3 cm pour le GPS et 1 cm pour le nivellement (Figure 9);
 - 3722 points gravimétriques sélectionnés, avec une distance moyenne entre les points d'environ 4 ~ 5 km et une distribution peu homogène due au manque des données gravimétriques sur les Pays-Bas, le Luxembourg et quelques endroits en Belgique (Figure 1);
 - Un MNT (Modèle Numérique de Terrain) à pas 9" x 12" créé en utilisant les altitudes des 3722 points gravimétriques et un MNT européen à pas de 4 km (pour le premier essai en novembre 1994, voir Jiang et al. 1994 et Poitevin et al. 1995, environ 50,000 points ont été utilisés pour construire un MNT, mais le MNT européen n'était alors pas disponible);
- De nouvelles données ont été obtenues depuis un an. Ce sont les données GPS nivelées à la frontière franco-belge et au Luxembourg, des données gravimétriques en Belgique et aux Pays-Bas, un MNT de la Belgique avec une résolution de 3" x 3" pour le sud et 3" x 6" pour le nord du pays, avec une précision moyenne de 5 ~ 10 mètres, les estimations des erreurs de donnée gravimétrique et de donnée GPS nivelée, etc. Elles n'ont pas pu être utilisées pour le calcul actuel, mais il est envisagé de les utiliser plus tard pour un calcul définitif.
- Le géoïde est calculé sous forme d'une grille de 49.4° ~ 51.5° en latitude et 2.5° ~ 7.67° en longitude avec une résolution respectivement de 0.05° et 0.06667°, soit 5 km, voir Figure 9, (le géoïde calculé en 1994 était sur 1068 points gravimétriques). Le nouveau géoïde couvre la Belgique, le Luxembourg, une partie des Pays-Bas et une partie de la France. Puisque la couverture des données gravimétriques va en s'amenuisant sur les pourtours de la grille, la précision du géoïde se dégrade à ces endroits.
- Nous avons utilisés pour ces calculs les logiciels GravSoft (Tscherning et al. 1992) et PiLi (Jiang 1995).
- Ce travail est une coopération, commencée en 1994, entre l'Institut Géographique National de France et l'Observatoire Royal de Belgique. Par la suite, le professeur C. C. Tscherning de l'Université de Copenhague, Danemark, s'y est joint.
- Comme la théorie et les méthodes mathématiques utilisées dans ce calcul sont un peu longues et lourdes à expliquer, nous avons adopté la présentation suivante:
 - La section 2 présente un rappel rapide de la méthode de collocation (voir Tscherning 1994 pour en connaître les détails). Cette méthode est implantée dans le logiciel GravSoft;
 - Annexe 1 de ce rapport: On fast intégration in geoid determination par Jiang and Duquenne (1995), un article proposé au Bulletin Géodésique. Il s'agit d'une nouvelle méthode pour calculer les intégrales de Stokes, la correction de terrain et le potentiel. Cette méthode est implantée dans le logiciel PiLi. Pour les gens intéressés, voir aussi les Rapport Géoïde n° 18, n° 18bis et n° 19 rédigés par Jiang;
 - Annexe 2 (qui est aussi Annexe 1 du Rapport Géoïde n° 23): On the combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points par Jiang et Duquenne (1995), un article accepté par le Bulletin Géodésique, actuellement sous presse. Il s'agit d'une nouvelle méthode pour adapter le géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés. Cette méthode est implantée dans le logiciel PiLi. Pour les gens intéressés, voir aussi les Rapports Géoïde n° 19 et n° 21 rédigés par Jiang. Il existe une autre méthode pour combiner le géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés de façon optimale, qui est la collocation, implantée dans le logiciel GravSoft. Ceci sera un des sujets du prochain Rapport Géoïde n° 23.

2. Rappel de la méthode de la collocation

Soient W et U respectivement les potentiel du champ de pesanteur de la terre et du champ de pesanteur normal, la différence $T=W-U$ est le potentiel perturbateur qui peut être représenté par une fonction harmonique et développé en harmoniques sphériques solides:

$$T(\bar{\varphi}, \lambda, r) = GM \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{C}_{nm} Y_{nm}(\bar{\varphi}, \lambda, r) \quad (2-1)$$

où $\bar{\varphi}, \lambda, r$ sont respectivement la latitude géocentrique, la longitude et la distance radiale et

$$Y_{nm}(P) = Y_{nm}(\bar{\varphi}, \lambda, r) = \frac{a^n}{r^{n+1}} \bar{P}_{nm}(\sin \bar{\varphi}) \begin{cases} \cos m\lambda & 0 \leq m \leq n \\ \sin m\lambda & -n \leq m \leq 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

où a est le demi grand axe de la terre et \bar{P}_{nm} sont les fonctions de Legendre. $Y_{nm}(P)$ sont les fonctions de base orthogonales avec un produit interne isotopique dans un espace de Hilbert, qui sont des harmoniques se prolongeant jusqu'à la sphère de Bjerhammar qui est entièrement enveloppée dans la terre. T n'est pas nécessairement un élément de cet espace mais il peut être approché arbitrairement par ces fonctions. L'espace possède un noyau reproducteur, qui est une fonction de deux points P et Q (dont les coordonnées seront indiquées par le signe: ') qui s'exprime par la formule :

$$K(P, Q) = \sum_{n=2}^{\infty} (2n+1) a^2 \sigma_n \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(P) Y_{nm}(Q) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n \left(\frac{a^2}{rr'} \right)^{n+1} P_n(\sin \psi) \quad (2-3)$$

où ψ, P_n, σ_n sont respectivement la distance sphérique entre P et Q, les polynômes de Legendre et les "degrés-variances" du potentiel. Dans l'espace de Hilbert du noyau reproducteur (EHNR), on peut déterminer des approximations des éléments à partir des données pour lesquelles les fonctionnelles linéaires associées sont limitées. La relation entre les données et T sont représentées en utilisant les fonctionnelles L_i , on a donc:

$$y_i = L_i(T) + e_i + A_i^T X \quad (2-4)$$

où y_i est le i 'ème élément de donnée. e_i, A_i et X sont respectivement l'erreur, un vecteur de dimension k et un vecteur de paramètre de dimension k également. Le dernier terme de l'équation (2-4) peut représenter, par exemple, l'effet d'une transformation de système de référence adopté pour les données.

Prenons les symboles suivants:

$$\begin{aligned} \zeta(P) &= T(P) / \gamma: && \text{anomalie de hauteur} \\ \delta(g) &= g(P) - \gamma(P): && \text{perturbation de gravité} \\ \Delta(g) &= g(P) - \gamma(Q): && \text{anomalie de gravité} \end{aligned} \quad (2-5)$$

où g, γ sont la pesanteur et la pesanteur normale. Q est un point qui a la longitude et la latitude du point P, mais a une hauteur ellipsoïdale égale à la hauteur orthométrique du point P. Les fonctionnelles linéaires deviennent :

$$\begin{aligned} \delta g &= -\frac{\partial T}{\partial r} \\ \Delta g &= -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{r} \end{aligned} \quad (2-6)$$

(2-6) représente les approximations sphériques qui ne sont utilisées que pour les quantités résiduelles. Dans le cas où il n'y a pas d'erreurs dans les observations, c'est à dire $y_i = L_i(T)$, l'approximation optimale est:

$$\hat{T}(Q) = \sum_1^n b_i K(L_i, Q) \quad (2-7)$$

$$\text{avec } \{b_j\} = \{K(L_i, L_j)\}^{-1} \{y_j\} \quad (2-8)$$

En se basant sur le modèle du champ de pesanteur donné par l'équation (2-7), toutes les quantités associées avec une fonctionnelle linéaire L peuvent être calculées en utilisant la formule suivante:

$$L(\hat{T}) = \sum_{i=1}^n b_i K(L_i, L) \quad (2-9)$$

Dans le cas où les données sont bruitées, les éléments σ_{ij} de la matrice de variance-covariance du vecteur-bruit doivent être ajoutés à $K(L_i, L_j)$. La solution optimale est donc celle qui minimise le carré de la norme de T et de la variance du bruit.

Pour minimiser l'erreur de moindre carré, le noyau reproducteur (2-3) doit être égal à la fonction de covariance empirique: $COV(P, Q)$, dont le degré-variance est égal à:

$$\sigma_n = \sum_{m=-n}^n \left(\frac{GM}{a} \right)^2 \bar{C}_{nm}^2 \quad (2-10)$$

L'équation normale correspondante est:

$$\bar{C} = \{COV(L_i, L_j)\} + \sigma_{ij} \quad (2-11)$$

les prédictions:

$$L(\hat{T}) = \sum_{i=1}^n b_i COV(L, L_i) \quad (2-12)$$

avec $\{b_i\} = \bar{C}^{-1} \{y_i\}$

et l'estimateur d'erreur:

$$\sigma(L)^2 = COV(L, L) - \{COV(L, L_i)\}^T \bar{C}^{-1} \{COV(L, L_j)\} \quad (2-13)$$

Les covariances sont calculées en utilisant la loi de propagation de covariance: $COV(L_i, L_j) = L_i(L_j(COV(P, Q)))$. $COV(P, Q)$ est la fonction de covariance de base du potentiel. Par exemple, en utilisant les fonctionnelles données par les équations (2-6) en $K(P, Q)$, on peut obtenir la fonction de covariance de l'anomalie de gravité:

$$COV(\Delta g(P), \Delta g(Q)) = \sum_{i=2}^{\infty} \sigma_i \frac{(i-1)^2}{rr'} \left(\frac{R^2}{rr'} \right)^{i+1} P_i(\cos \psi)$$

En utilisant la méthode de retrait (enlever les contributions du modèle de potentiel OSU91A et de l'effet topographique): les quantités résiduelles deviennent (voir équation (2-4)):

$$y_{i, res} = y_i - L_i(T_{OSU}) - L_i(T_{top}) = L_i(T) - L_i(T_{OSU}) - L_i(T_{top}) + e_i + A_i^T X \quad (2-14)$$

En introduisant des informations locales, les N premiers degrés des degrés-variances seront modifiés. Les N nouveaux degrés dépendent des erreurs des coefficients des séries. Nous supposons qu'ils sont proportionnels aux degrés-variances d'erreur:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \alpha \sigma_n^E \\ \sigma_n^E &= \sum_{m=-n}^n \varepsilon_{nm}^2 \end{aligned} \quad (2-15)$$

où ε_{nm} est l'écart-type de $\frac{GM}{a} \bar{C}_{nm}$ et le facteur d'échelle α est à déterminer.

La fonction de covariance pour la collocation est

$$COV(P, Q) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} T(P)T(Q) d\alpha \cos \varphi d\varphi d\lambda \quad (2-16)$$

(2-16) est l'expression globale dont l'intégration est faite en azimuth, latitude et longitude $(\alpha, \varphi, \lambda)$. Elle ne dépend que des distances radiales de P et Q et de la distance sphérique ψ . En pratique, un échantillonnage de l'ensemble des données locales est nécessaire et la fonction de covariance (correspondant à la moyenne des hauteurs de la région dont le géoïde est à déterminer) se calcule en utilisant la formule suivante:

$$COV(\psi, r, r') \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M T(P)T(Q) \quad (2-17)$$

Mais T n'est pas une 'observation', par contre les anomalies de pesanteur etc. peuvent l'être. La fonction de covariance de l'approximation sphérique pour les anomalies de pesanteur est:

$$COV(\Delta g(P), \Delta g(Q)) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{R} \right)^2 \sigma_n \left(\frac{R^2}{rr'} \right)^{n+2} P_n(\cos \psi) \quad (2-18)$$

où R est le rayon moyen de la terre. (2-18) est une sommation infinie pouvant être approchée par le modèle de degré-variance, qui est en fait une fonction d'un certain degré et du degré-variance. Le modèle le meilleur (Tscherning et Rapp 1974) est:

$$\sigma_n = A(n-1)(n-2)(n-B) \left(\frac{R_B}{R} \right)^2 \quad (2-19)$$

où R_B est le rayon de la sphère de Bjerhammar, A est une constante et B un entier. Supposons qu'on veuille calculer un géoïde avec une précision relative de 1 ppm, soit 1 cm sur 10 km (ceci correspond à une erreur de 0.2" de la déflexion verticale et de 1.2 mgal de la pesanteur), la distance d'échantillonnage des données gravimétriques requise, d , est donc (Tscherning 1985):

$$\bar{e}_d^2 \approx C_0 \left(0.3 \frac{d}{\psi_1} \right)^2$$

ou

$$d \approx \frac{1}{\sqrt{C_0}} \left(\frac{\bar{e}_d \psi_1}{0.3} \right) \quad (2-20)$$

où \bar{e}_d , C_0 et ψ_1 sont respectivement l'écart-type de l'erreur gravimétrique interpolée, la variance de l'anomalie résiduelle et la distance de corrélation.

Le calcul du quasi-géoïde gravimétrique résiduel en utilisant la collocation peut être exécuté en utilisant les sous-programmes GEOCOL10, EMPCOV, COVFIT implantés dans le logiciel GravSoft (Tscherning et al. 1992).

3. Calculs numériques

Pour tous les calculs, nous avons utilisé la méthode de retrait et restauration. C'est à dire:

Retrait (enlever de l'anomalie à l'air libre Δg_{al} les longueurs d'onde de l'OSU91a et du RTM):

$$\Delta g_{res} = \Delta g_{al} - \Delta g_{OSU} - \Delta g_{RTM} \quad (3-1)$$

Restauration (restaurer au géoïde résiduel ζ_{res} les longueurs d'onde de l'OSU91a et du RTM):

$$\zeta = \zeta_{res} + \zeta_{OSU} + \zeta_{RTM} \quad (3-2)$$

où le géoïde résiduel ζ_{res} peut être calculé en utilisant l'intégrale de Stokes ou la collocation.

La préparation des données : gravimétrie, MNT, GPS et nivellement, est la même, pour ce calcul, que pour le calcul du quasi-géoïde gravimétrique de novembre 1994 (Jiang et al. 1994). Le tableau 1 reprend les statistiques du champ de pesanteur en Belgique et aux alentours.

Tableau 1 Statistiques des 3722 données gravimétriques (mgal)

	min	max	moyenne	rms	écart-type
latitude	49.98	51.72	50.13		
longitude	2.48	7.01	4.77		
altitude	-1.00	694.40	163.16	211.29	134.25
anomalie Δg_{al}	-32.375	62.084	4.143	16.494	15.965

Pour la clarté de ce qui est abordé dans ce chapitre, on définit :

- **géoïde1:** la solution du quasi-géoïde gravimétrique de novembre 1994. Il a été calculé sur 1068 points gravimétriques;
- **géoïde2:** la solution du quasi-géoïde gravimétrique en utilisant l'intégration rapide, c'est à dire le calcul des quantités Δg_{RTM} , ζ_{res} et ζ_{RTM} dans les équations (3-1) et (3-2) (cf. Jiang et Duquenne 1995b, voir Annexe 1). Comparée avec la méthode de la sommation directe, cette nouvelle méthode permet de gagner en moyenne 97% du temps CPU sans perte de précision (Rapport Géoïde n° 18 et 18bis, Jiang 1995). L'intégration rapide a été implantée dans le logiciel PiLi. Il y a au total 2870 points dans la grille du géoïde2;
- **géoïde3:** le même que le géoïde2, sauf que le géoïde résiduel est calculé en utilisant la collocation et non l'intégration de Stokes. Ceci permet de donner un estimateur de la précision du géoïde résiduel;
- **géoïde4a et géoïde4b:** Adaptation du géoïde2 et géoïde3 aux points GPS nivelés en utilisant la méthode de compensation combinée (Jiang et Duquenne 1995a, voir Annexe 2). Pendant cette compensation, le géoïde2/3 et les données GPS nivelées sont considérés comme les observations. Puisque l'estimateur de la précision du géoïde3 sur la Belgique (Luxembourg) est presque constant (voir Figure 5): 8 cm (probablement parce que la précision des données gravimétriques est inconnue et donc considérée partout comme constante: 1.0 mgal), la précision a priori du géoïde2/3 est donc 8 cm. La précision a priori des observations GPS nivelé est 3 ~ 4 cm. Le ratio des deux types d'observation est donc 1:8. Considérant le but de ce rapport qui est le calcul du quasi-géoïde gravimétrique et non l'adaptation du géoïde aux points GPS nivelé (ce sera le sujet du prochain Rapport Géoïde n° 23), le traitement pour l'approximation de la pondération des observations ci-dessus est tolérable. La méthode de la compensation combinée a été implantée dans le logiciel PiLi.

3.1 Retrait

Le tableau 2 suivant montre le champ d'anomalie résiduel. Comparé avec le tableau 1, le champ résiduel est beaucoup plus lisse. L'intégration rapide du logiciel PiLi a été utilisée pour la correction de terrain résiduelle Δg_{RTM} .

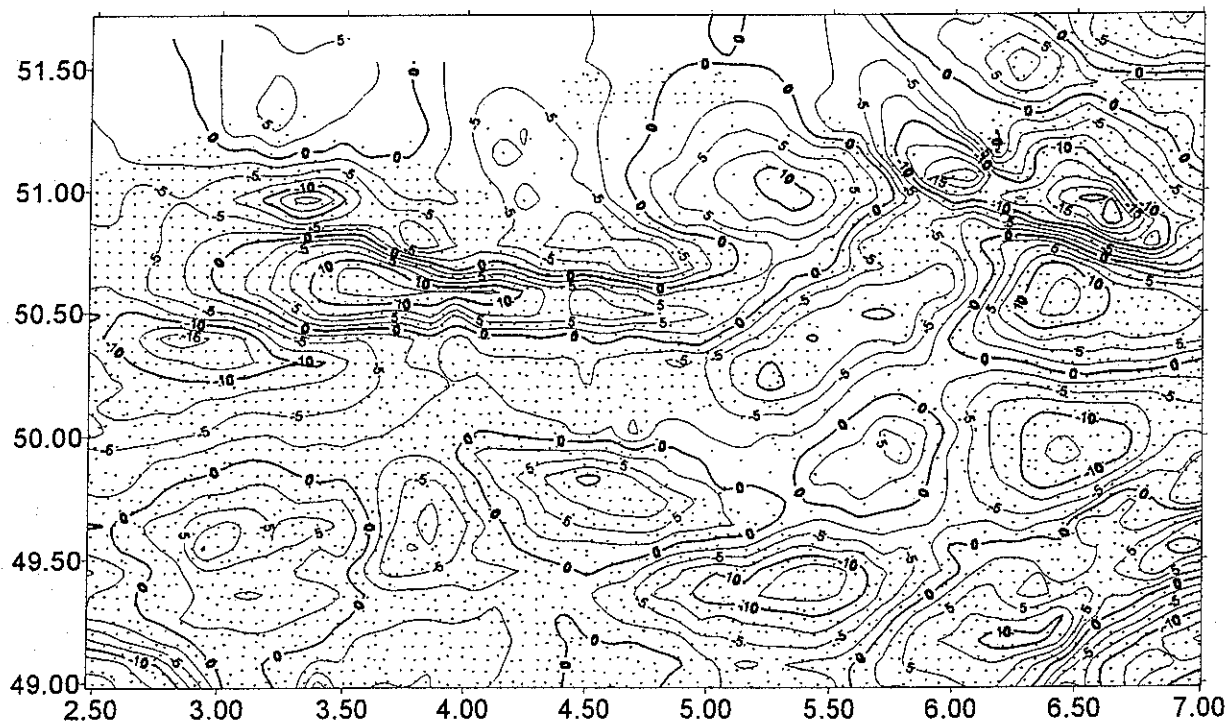


Figure 1 Anomalies résiduelles Δg_{res} (mgal)

La figure 1 montre la distribution des données gravimétriques et des anomalies résiduelles Δg_{res} correspondant au tableau 1.

Tableau 2 Statistiques des 3722 anomalies résiduelles (mgal, par intégration rapide)

anomalie	min	max	moyenne	rms	écart-type
Δg_{at}	-32.38	62.08	4.14	16.49	15.97
Δg_{OSU}	-17.46	39.68	6.12	14.68	13.33
Δg_{RTM}	-29.36	36.20	-0.10	5.65	5.65
Δg_{res}	-26.85	16.25	-1.88	6.84	6.57

Le tableau 3 décrit le champ d'anomalie résiduel, où la correction de terrain résiduelle Δg_{RTM} a été calculée en utilisant la sommation directe du logiciel GravSoft faite en 1994 (Jiang et al. 1994).

Tableau 3 Statistiques des 3722 anomalies résiduelles (mgal, sommation directe)

anomalie	min	max	moyenne	rms	écart-type
Δg_{RTM}	-27.73	30.83	-0.54	5.45	5.42
Δg_{res}	-27.54	20.34	-1.61	7.00	6.81

La comparaison des tableaux 2 et 3 montre que l'intégration rapide et la sommation directe donnent presque le même résultat.

3.2 Restauration

L'effet du terrain résiduel sur le géoïde ζ_{RTM} a été calculé en utilisant l'intégration rapide de l'intégrale de potentiel du logiciel PiLi. Il existe deux méthodes pour calculer le géoïde résiduel ζ_{res} : l'intégration rapide de PiLi; la collocation de GravSoft décrites dans les sections suivantes:

3.2.1 Solution de l'intégration rapide de l'intégrale de Stokes

Le tableau 4 reprend les résultats de la restauration du géoïde en utilisant l'intégrale de Stokes. La figure 2 représente le quasi-géoïde résiduel ζ_{res} correspondant au tableau 4.

Tableau 4 Restauration du géoïde2 de l'intégrale de Stokes (m, 2870 points)

	min	max	moyenne	rms	écart-type
ζ_{OSU}	44.651	48.820	46.259	46.273	1.133
ζ_{res}	-0.295	0.267	0.020	0.118	0.116
ζ_{RTM}	-0.142	0.245	0.014	0.059	0.057
ζ	44.735	48.926	46.294	46.308	1.140

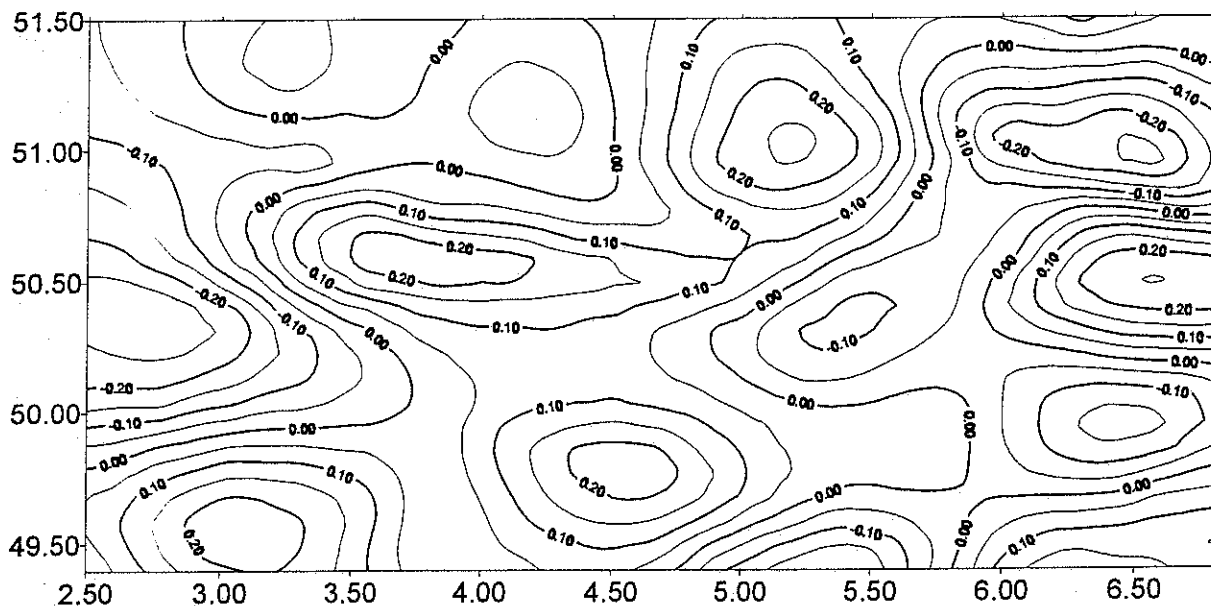


Figure 2 Quasi-géoïde résiduel ζ_{res} par l'intégration (rapide) de Stokes (m)

La figure 3 représente le quasi-géoïde ζ (géoïde2) correspondant au tableau 4.

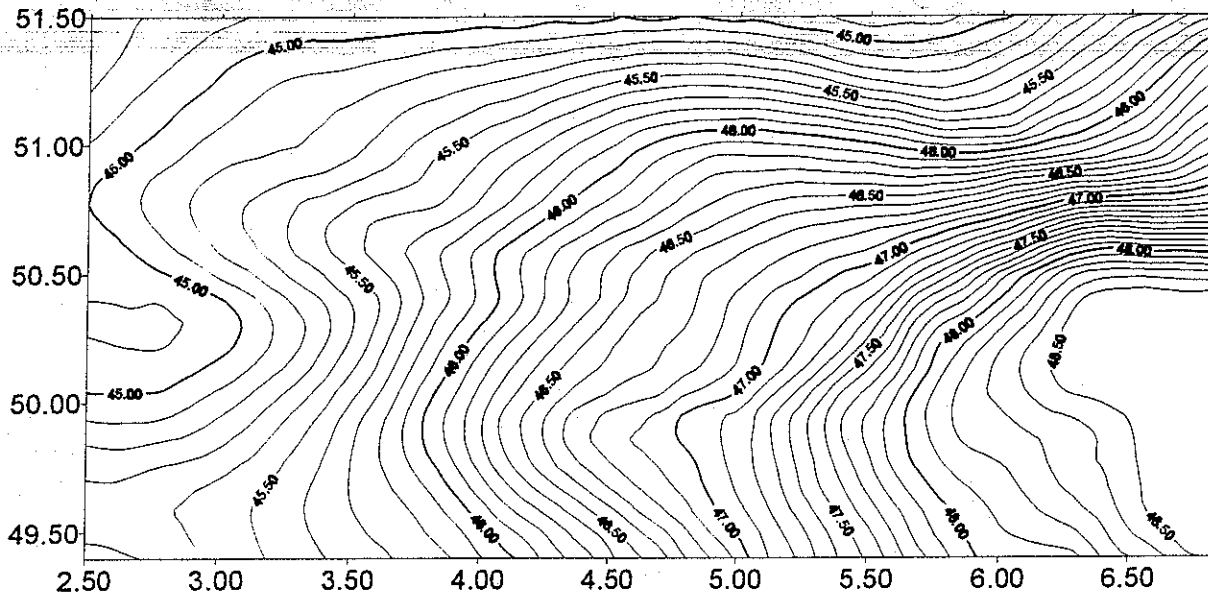


Figure 3 Géoïde2: quasi-géoïde ζ par l'intégration (rapide) de Stokes (m)

3.2.2 Solution de la collocation

Les paramètres suivants de la fonction de variance-covariance ont été déterminés pour la prédiction du géoïde à partir des anomalies résiduelles:

- Variance des anomalies résiduelles $C_0 = 46.4 \text{ (mgal)}^2$
- Facteur d'échelle $\alpha = 0.055$
- Profondeur de la sphère de Bjerhamra $R_B - R_e = -15.77 \text{ km}$
- hauteur moyenne $H_m = 163 \text{ m}$

Les figures 4 et 5 représentent le quasi-géoïde résiduel ζ_{res} , correspondant au tableau 5, et l'estimation de l'erreur.

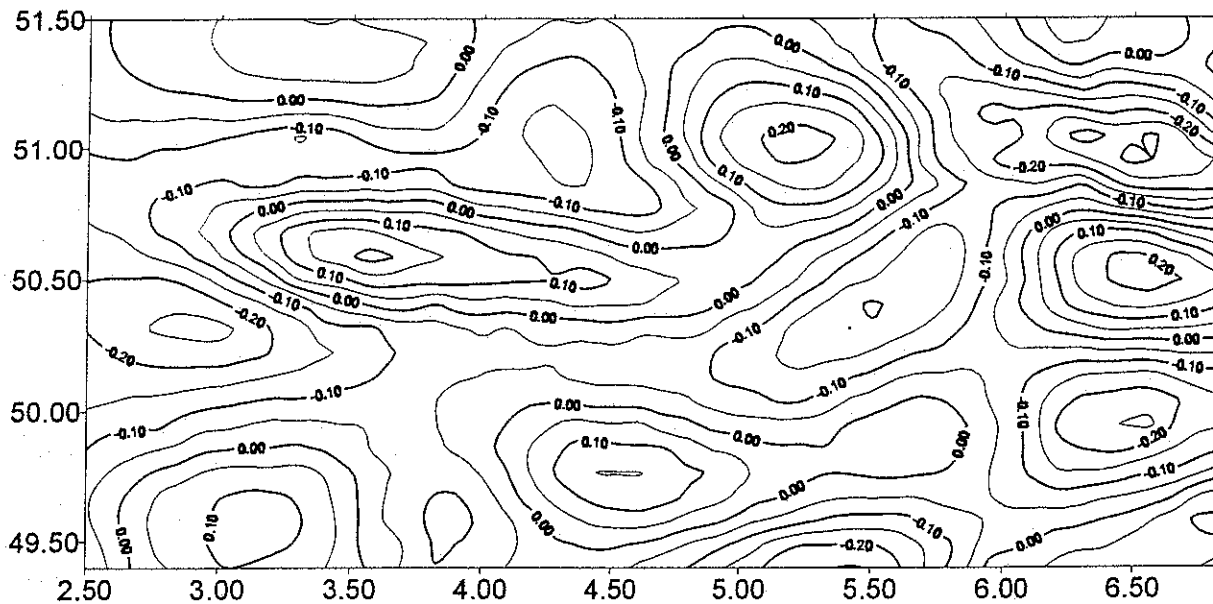


Figure 4 Quasi-géoïde résiduel ζ_{res} par la collocation (m)

Le tableau 5 reprend les statistiques de la restauration du géoïde 3:

Tableau 5 Restauration du géoïde3 de la collocation (m, 2870 points)

	min	max	moyenne	rms	écart-type
ζ_{res}	-0.360	0.250	-0.039	0.114	0.108
ζ	44.641	48.947	46.235	46.248	1.132

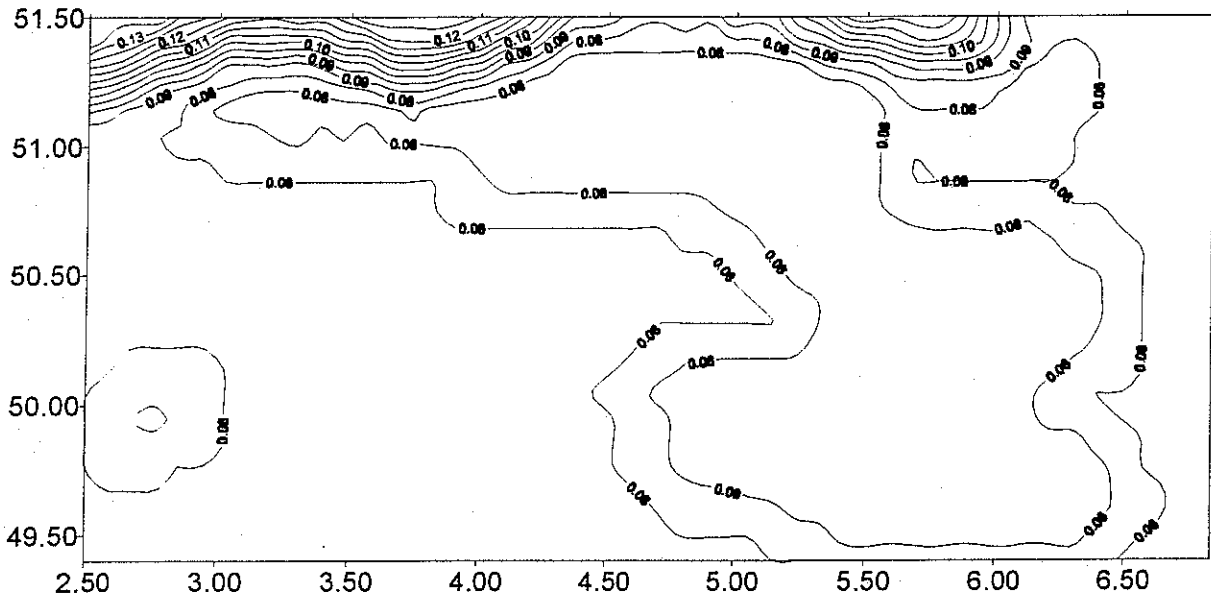


Figure 5 Estimation de l'erreur du quasi-géoïde résiduel ζ_{res} par la collocation (m)

La figure 6 représente le quasi-géoïde résiduel ζ correspondant au tableau 5.

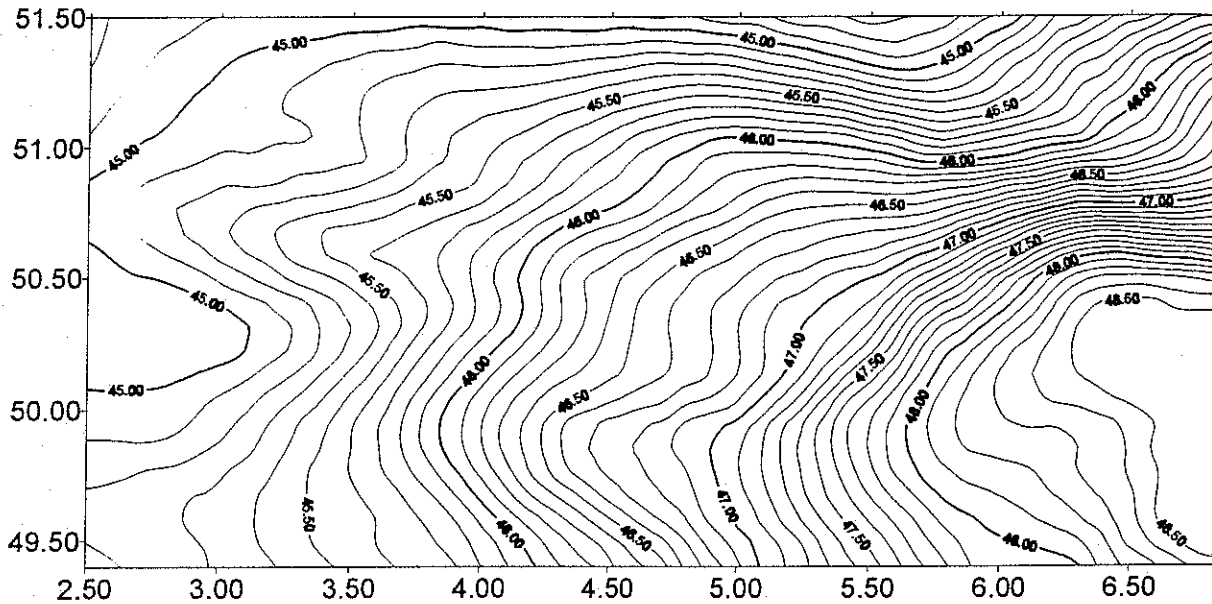


Figure 6 Géoïde3: quasi-géoïde ζ par la collocation (m)

3.3 Adaptation du quasi-géoïde gravimétrique aux points GPS nivelés

Nous avons utilisé quatre méthodes :

3.3.1 Transformation de similitude à 4 paramètres

Une simple transformation de similitude à 4 paramètres (3 pour le vecteur en X, Y, Z et 1 d'échelle) a été utilisée pour enlever les erreurs de grande longueur d'onde produites par le modèle géopotentiel OSU91a; qui se présentent comme une différence systématique d'environ 1.5 ~ 2.2 mètres (Jiang et al. 1994, Poitevin et al. 1995). Le tableau 6 reprend les résultats statistiques des résidus donnés par les différentes solutions:

Tableau 6 Statistiques des résidus du quasi-géoïde gravimétriques après une transformation de similitude (m, 32 points GPS nivelés)

géοïde	min	max	moyenne	rms	écart-type
géοïde1	-0.117	0.112	0.000	0.051	0.051
géοïde2	-0.123	0.129	0.000	0.058	0.058
géοïde3	-0.124	0.130	0.000	0.063	0.063

Remarque:

(1) En comparant les écarts-types des différentes solutions, il apparaît que le géοïde1 a une précision un peu meilleure que les géοïde2 et géοïde3. Comme on le montre dans l'introduction, pour le géοïde1 environ 50,000 altitudes de points gravimétriques ont été utilisés pour construire un MNT, tandis que pour le géοïde2/3 seulement 3722 altitudes de points gravimétriques (correspondant à une résolution de 4 ~ 5 km) ont été utilisés pour le MNT. Ceci produit très probablement quelques centimètres d'erreur. On espère donc utiliser par la suite un MNT plus précis.

(2) Une simple transformation, régression linéaire à 3 dimensions, (latitude, longitude et altitude) a été également faite pour les trois solutions afin d'enlever les erreurs de grande longueur d'onde. Mais le résultat est beaucoup plus pessimiste que celui de la transformation de similitude à 4 paramètres. Les résidus importants se trouvent en bord de mer et aux frontières de la Belgique (Figure 7). Ceci montre qu'il existe peut-être des erreurs importantes dues à des longueurs d'onde de 20 à 100 km produites par le modèle du potentiel et par le manque de données gravimétriques. Voir le tableau 7 suivant:

Tableau 7 Statistiques des résidus du quasi-géoïde gravimétrique après une régression 3D (m, 32 points GPS)

géοïde	min	max	moyenne	écart-type
géοïde1	-	-	-	0.095
géοïde2	-0.243	0.139	0.009	0.092
géοïde3	-0.202	0.151	0.006	0.076

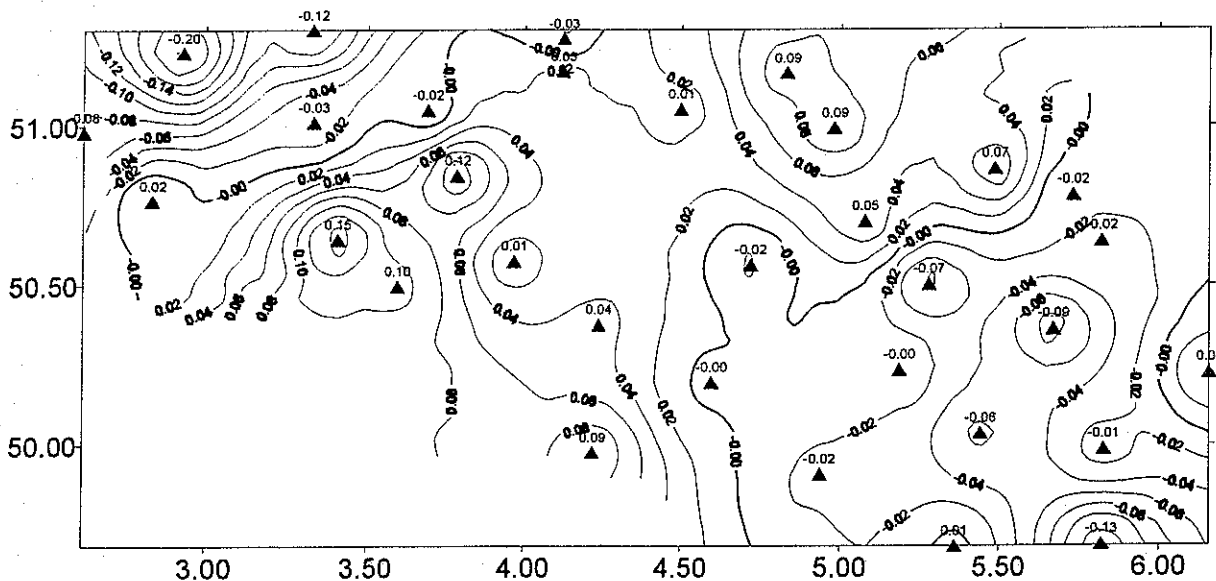


Figure 7 Résiduels du géοïde3 après une régression 3D (m, 32 points GPS nivelés)

(3) Une transformation polynomiale à 5 paramètres a été appliquée également. Les minima, maxima, moyennes et écarts-type des résidus sont presque identiques pour le géοïde2 et pour le géοïde3: -0.089, 0.113, 0.000 et 0.053.

3.3.2 Compensation combinant quasi-géoïde gravimétrique et points GPS nivelés

Le tableau 9 et la figure 10 montrent la précision relative des différentes solutions. On remarque que la compensation combinée peut améliorer la précision relative ainsi que la précision absolue. Il apparaît que la solution de l'intégral de Stokes (géoïde4a) est meilleure que la solution de la collocation (géoïde4b) pour les distances courtes: 25 ~ 50 km mais le contraire se produit pour les distances moyennes: 100 ~ 200 km et 200 ~ 300 km.

Tableau 9 Précision relative des différentes solutions du quasi-géoïde (ppm = cm/10km)

distance moyenne	géoïde2	géoïde3	géoïde4a	géoïde4b
25 ~ 50 km	2.18	2.17	0.82	0.88
100 ~ 200 km	1.08	0.84	0.30	0.28
200 ~ 300 km	0.52	0.48	0.20	0.18

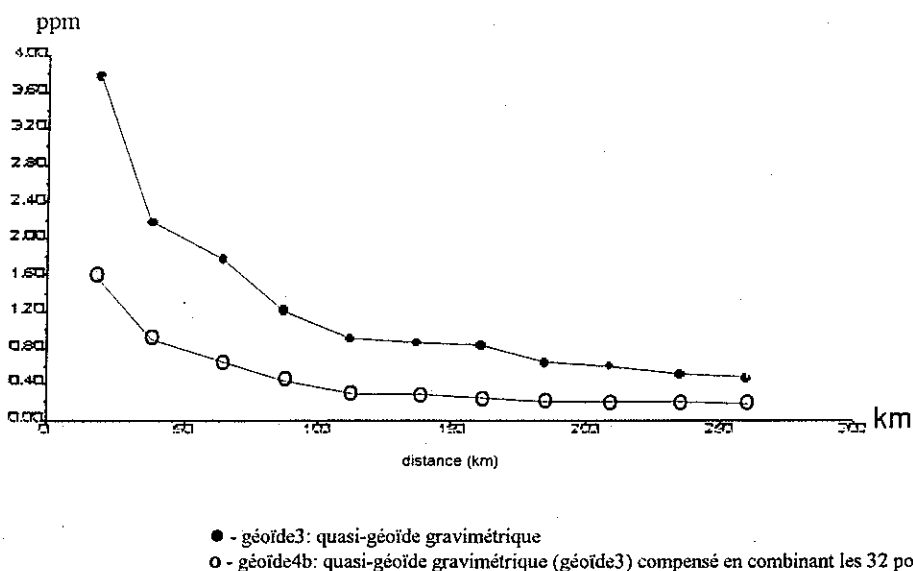


Figure 10 Précision relative des différentes solutions du quasi-géoïde (ppm = cm/10km)

4. Conclusion

- Deux nouvelles solutions pour le quasi-géoïde gravimétrique de la Belgique et du Luxembourg ont été obtenues en utilisant deux méthodes indépendantes : la méthode de Stokes modifiée par l'intégration rapide et la méthode de collocation. En utilisant différentes méthodes d'adaptation des solutions gravimétriques aux points GPS nivelés, on montre que les nouvelles solutions ont une précision absolue d'environ 3 ~ 6 centimètres et une précision relative d'environ 1 ~ 2 ppm pour les courtes distances de 25 ~ 50 km et 0.2 ~ 0.5 pour les distances moyennes de 200 ~ 300 km.
- Les solutions gravimétriques géoïde1, géoïde2 et géoïde3 (obtenues par la sommation directe, l'intégration rapide et la collocation implantées dans les logiciels GravSoft et PiLi) donnent approximativement la même précision, mais le géoïde1 est un peu meilleur que le géoïde2 et le géoïde3. Ceci est dû très probablement à la résolution différente du MNT utilisé. L'avantage principal de l'intégration rapide est la grande vitesse de calcul sans perte de précision. Un des avantages de la collocation est de donner une estimation de l'erreur du géoïde gravimétrique calculé.
- La compensation combinant le géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés est une des méthodes optimales pour ajuster les deux types de données. Celle-ci peut donner aussi une estimation de l'erreur des moindres carrés du géoïde gravimétrique ajusté.
- Une autre méthode pour combiner le géoïde gravimétrique et les points GPS nivelés de façon optimale est la collocation. Ceci sera un des sujets du prochain Rapport Géoïde n° 23 et n'est donc pas abordé dans ce rapport.

- Finalement, il faut souligner que la collecte de nouvelles données intéressant la Belgique et les pays voisins a beaucoup avancé depuis un an, une meilleure solution pour le quasi-géοide, ainsi que son adaptation aux points GPS nivelés, sera calculée prochainement.

Remerciements

Les auteurs remercient les personnes et les organisations suivantes:

L'Institut Géographique National de Belgique pour les données GPS nivelées sur le territoire de la Belgique.
 Le Service de la Géodésie et du Nivellement de l'Institut Géographique National de France pour les données GPS nivelées aux frontières franco-belge et franco-luxembourgeoise.
 Le Service Géologique National du BRGM pour les données gravimétriques françaises.
 M. Pâquet, directeur de l'Observatoire Royal de Belgique, pour avoir encouragé le premier auteur et l'avoir accueilli à l'Observatoire Royal de Belgique pour une période de recherche sur ce sujet.
 MM. G. Balmino et H. Duquenne pour leurs conseils.
 M. Rapp pour avoir donné l'autorisation d'utiliser l'OSU91a.

Référence principale

- Jiang Z. C. Poitevin, M. Everaerts (1994): Premier essais du calcul du géοide gravimétrique de la Belgique, Rapport du Géοide N° 11
- Jiang Z., H. Duquenne (1995a): On fast intégration in geoid determination, présenté au Journal of Geodesy
- Jiang Z., H. Duquenne (1995b): On combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, présenté à et accepté par le Journal of Geodesy, sous pression
- Jiang Z. (1995c): PiLi - a new software for the geoid determination, presented to the XXI General Assembly of IUGG, July 1995, Boulder, USA.
- Moritz H. (1980): Advanced physical geodesy, H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 1980
- Poitevin C., Z. Jiang, M. Everaerts (1995): Le géοide gravimétrique en Belgique, Photogrammétrie - Télédétection et Cartographie, n° 197-198, Belgique.
- Tscherning C.C., Rapp (1974): A FORTRAN IV program for the determination of the anomalous potential using stepwise least squares collocation, Reports of the Department of Geodetic Science No. 212, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1974.
- Tscherning C.C. (1985): Local approximation of the gravity potential by least squares collocation. In: K.P. Schwarz (Ed.): Proceedings of the International Summer School on Local Gravity Field Approximation, Beijing, China. Aug. 21 - Sept. 4, 1984. Pub. 60003, Univ. of Calgary, Calgary, Canada, pp. 277-362, 1985.
- Tscherning C.C., Forsberg R., Knudsen P. (1992): The GravSoft Package for geoid determination, Presented at the First Continental Workshop on the geoid in Europe (1990), Prague, CZECH Republic.
- Tscherning C.C. (1994): Geoid determination by least square collocation using GRAVSOFT, Lecture Notes of International School for the Determination and Use of the Geoid, October 10 -15, 1994, Milan, Italy.

Annexe 1. Rappel de la méthode d'intégration rapide

On fast integration in geoid determination, proposé au Journal of Geodesy

Annexe 2. Rappel de la compensation combinée

On combined adjustment of a gravimetrically determined geoid and the GPS levelling points, accepté par le Journal of Geodesy, sous presse. Voir Annexe 1 du Rapport Géοide n° 23.